

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАЛЕЦКОГО С УЧЕТОМ ИНВЕСТИЦИОННОГО ВРЕМЕННОГО ЛАГА

УДК 338.27

Эдуард Аршавирович Геворкян,
д. физ.-мат. н., профессор, академик Российской академии естествознания, профессор кафедры высшей математики, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)
Тел.: 8 (903) 139-73-97
Эл. почта: EGevorkyan@mesu.ru

Анна Эдуардовна Мартиросян,
старший преподаватель кафедры прикладной математики, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)
Тел.: 8 (909) 164-04-04
Эл. почта: gevanna82@mail.ru

Исследована зависимость валового внутреннего продукта от времени ($Y(t)$) в макроэкономической модели Калецкого с учетом инвестиционного временного лага в случае периодической зависимости функции потребления от времени. В результате решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения и дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом получены аналитические выражения для $Y(t)$. Показаны некоторые аспекты влияния учета временного лага на характер изменения функции $Y(t)$.

Ключевые слова: валовой внутренний продукт, функция потребления, обыкновенное дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, временной лаг, периодическая зависимость.

Eduard A. Gevorkyan,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of the Russian Academy of Natural Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics (MESI)
Tel.: 8 (903) 139-73-97
E-mail: EGevorkyan@mesu.ru

Anna E. Martirosyan,
Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics (MESI)
Tel.: 8 (909) 164-04-04
E-mail: gevanna82@mail.ru

MACROECONOMIC KALECKI'S MODEL IN VIEW OF AN INVESTMENT TEMPORARY LAG

The dependence of the gross domestic product on time ($Y(t)$) in macroeconomic Kalecki's model in view of an investment temporary lag in the case of periodic dependence of the consumption function on time is investigated. As a result of solutions of linear ordinary differential equation and differential equation with lagging argument an analytical expressions for the $Y(t)$ is received. Some aspects of influence of a temporary lag on character of variation of the function $Y(t)$ are shown.

Keywords: gross domestic product, consumption function, ordinary differential equation, differential equation with lagging argument, temporary lag, periodic dependence.

1. Введение

В научной литературе опубликовано много работ, посвященных вопросам динамики изменения валового внутреннего продукта в рамках макроэкономических моделей воспроизводства. При этом большое внимание учеными было уделено учету инвестиционного временного лага между производственным накоплением и приростом валового внутреннего продукта. Это объясняется тем, что инвестиционные временные лаги играют большую роль в процессе воспроизводства [1–5]. В работах [6–7] решены задачи динамики изменения валового внутреннего продукта в рамках макроэкономической модели Калецкого с учетом инвестиционного временного лага в случаях, когда функция потребления зависит от времени по линейному и квадратичному законам. Ниже решается аналогичная задача при периодической зависимости функции потребления от времени.

2. Постановка задачи и метод решения

Как известно, изменение валового внутреннего продукта в зависимости от времени в макроэкономической модели Калецкого описывается обыкновенным неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка и имеет вид [1–4]:

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B} \cdot Y(t) = -\frac{X(t)}{B}, \quad (1)$$

где $Y(t)$ – валовой внутренний продукт,

$X(t)$ – потребление,

B – капиталоемкость валового внутреннего продукта (акселератор).

Предположим, что функция потребления $X(t)$ периодически зависит от времени, то есть

$$X(t) = (1 - \alpha) \cos \omega t \quad (2)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$ – постоянная норма производственного накопления, ω – частота колебаний.

Тогда с учетом (2) уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B} \cdot Y(t) = -\frac{(1 - \alpha)}{B} \cos \omega t. \quad (3)$$

Теперь перейдем к решению дифференциального уравнения (3), имея в виду начальное условие Коши

$$Y(0) = Y_0. \quad (4)$$

Известно (см., например [8]), что общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (3) складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B} \cdot Y(t) = 0 \quad (5)$$

и одного частного решения неоднородного уравнения (3), то есть

$$Y_{o.h.}(t) = Y_{o.o.}(t) + Y_{ч.н.}(t). \quad (6)$$

Решая уравнение (5), как дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, получим

$$Y_{o.o.}(t) = C \cdot e^{\frac{t}{B}}, \quad (7)$$

где произвольная постоянная $C > 0$. Частное решение неоднородного уравнения (3) будем искать методом вариации постоянной в виде

$$Y_{ч.н.} = C(t) \cdot e^{\frac{t}{B}}, \quad (8)$$

где неизвестная функция $C(t)$ определяется подстановкой (8) в (3) и интегрированием полученного дифференциального уравнения относительно $C(t)$. Вычисления приводят к следующему выражению

$$C(t) = \frac{1-\alpha}{1+\omega^2 B^2} \cdot e^{-\frac{t}{B}} \cdot (\cos \omega t - \omega B \sin \omega t). \quad (9)$$

Теперь из (6) с учетом (9), (8) и (4) для общего решения дифференциального уравнения (3) получим

$$Y_{о.н.}(t) = Y(t) = \left(Y_0 - \frac{1-\alpha}{1+\omega^2 B^2} \right) \cdot e^{\frac{t}{B}} + \frac{1-\alpha}{1+\omega^2 B^2} (\cos \omega t - \omega B \sin \omega t). \quad (10)$$

Из (10) видно, что в случае периодической зависимости функции потребления от времени по закону (2) валовой внутренний продукт как функция от времени имеет колебательный характер с частотой ω и с увеличением времени возрастает. На рисунке 1 приведены графики зависимости валового внутреннего продукта от времени $Y(t)$ без учета запаздывания ($\tau = 0$). Кривые построены согласно формуле (10) при следующих значениях параметров: $Y_0 = 1, \omega = 3, \alpha = 0.6, B = 1, B = 2, B = 3$.

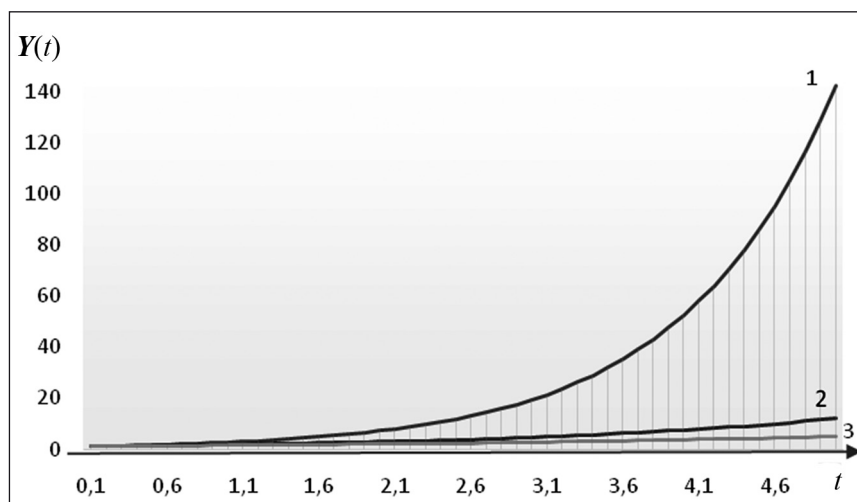


Рис. 1. Зависимость валового внутреннего продукта от времени без учета запаздывания: 1 – $B = 1$; 2 – $B = 2$; 3 – $B = 3$.

Они показывают, что при фиксированных значениях Y_0, ω и α чем больше значение капиталоемкости валового внутреннего продукта B , тем медленнее происходит возрастание валового внутреннего продукта $Y(t)$.

Теперь если в модели Калецкого учитывать существование инвестиционного временного лага между производственным накоплением, приростом валового внутреннего продукта и потреблением (накопление в момент времени t зависит от валового внутреннего продукта и потребления в момент времени $t - \tau > 0$), то вместо обыкновенного дифференциального уравнения (3) для функции $Y(t)$ получим следующее неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с запаздывающим аргументом

$$\begin{aligned} \frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B} \cdot Y(t - \tau) = \\ = -\frac{(1-\alpha)}{B} \cos \omega(t - \tau), \end{aligned} \quad (11)$$

где τ – временной лаг. Отметим, что общее решение уравнения (11) будет выражаться формулой (6).

Решение однородного уравнения

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B} \cdot Y(t - \tau) = 0 \quad (12)$$

будем искать методом Эйлера в виде [5]

$$Y_{о.о.}(t) = C \cdot e^{\lambda t}, \quad (13)$$

где λ – прирост валового внутреннего продукта, а произвольная постоянная

C определяется из начального условия (4). Подстановка (13) в (12) приводит к следующему трансцендентному характеристическому уравнению для определения λ

$$\lambda = \frac{1}{B} \cdot e^{-\lambda \tau}. \quad (14)$$

Разложая правую часть (14) в ряд Тейлора вокруг нуля и ограничиваясь двумя членами разложения при малых значениях $\lambda \tau$, для λ и $Y_{о.о.}(t)$ получим

$$\begin{aligned} \lambda \cong \frac{1}{B + \tau}, \\ Y_{о.о.}(t) = C \cdot e^{\frac{1}{B + \tau} t}. \end{aligned} \quad (15)$$

Частное решение $Y_{ч.н.}(t)$ неоднородного уравнения (11) при условии $(B + \tau)^{-1} \neq \omega$ будем искать методом подбора в виде

$$Y_{ч.н.}(t) = A \cos \omega t + D \sin \omega t, \quad (16)$$

где A и D пока неопределенные коэффициенты. Подстановка (16) в (11) приводит к неоднородной системе алгебраических уравнений относительно A и D . Решая эту систему, получим

$$\begin{aligned} A = -\frac{(1-\alpha)(1+B\omega \sin \omega \tau)}{B^2 \omega^2 + 2B\omega \sin \omega \tau + 1}, \\ D = -\frac{(1-\alpha)B \cos \omega \tau}{B^2 \omega^2 + 2B\omega \sin \omega \tau + 1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь согласно (6) с учетом (17), (16), (15) и (4) для общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (11) получим следующее выражение

$$\begin{aligned} Y_{о.н.}(t) = Y(t) = \\ = \left(Y_0 - \frac{1-\alpha}{B^2 \omega^2 + 1} \right) \cdot e^{\frac{t}{B + \tau}} + \\ + \frac{1-\alpha}{B^2 \omega^2 + 2B\omega \sin \omega \tau + 1} \cdot \\ \cdot [\cos \omega t - B\omega \sin \omega(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что полученное решение (18) переходит в выражение (10) при $\tau = 0$.

Как следует из (18), при учете инвестиционного лага валовой внутренний продукт в зависимости от времени сохраняет свой возрастающий и колебательный характер.

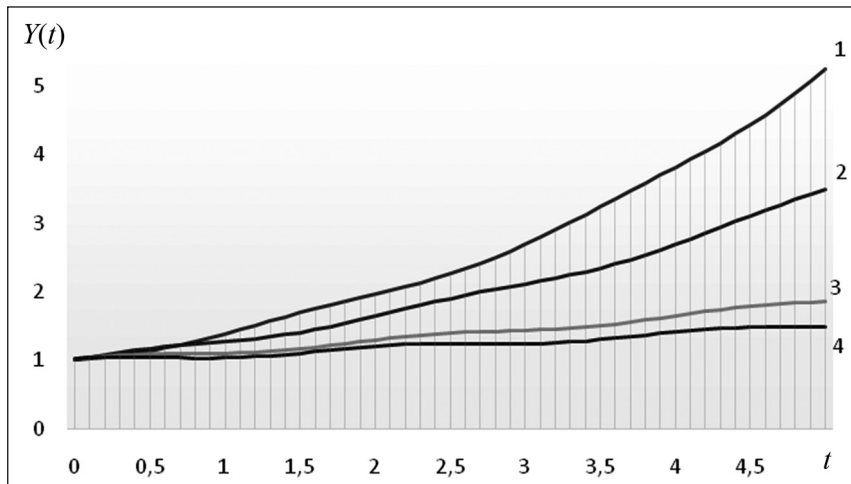


Рис. 2. Зависимость валового внутреннего продукта от времени с учетом запаздывания: 1 – $\tau = 0$; 2 – $\tau = 1$; 3 – $\tau = 5$; 4 – $\tau = 9$.

Но темп возрастания зависит от временного лага τ . На рисунке 2 приведены графики зависимости валового внутреннего продукта $Y(t)$ от времени с учетом запаздывания. Кривые построены при следующих значениях параметров: $Y_0 = 1$, $\omega = 3$, $\alpha = 0.6$, $\tau = 0$, $\tau = 1$, $\tau = 9$. Как видно из рисунка 2, чем больше значение временного лага τ тем медленнее возрастает валовой внутренний продукт в зависимости от времени.

3. Заключение

В работе с помощью решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом решена задача динамики валового внутреннего продукта в макроэкономической модели Калецкого с учетом инвестиционной временной задержки при периодической зависимости функции потребления от времени. Показано, что учет временного лага имеет существенное влияние на динамику валового внутреннего продукта. При этом с увеличением временного лага прирост валового внутреннего продукта убывает. Периодическая зависимость функции

потребления от времени приводит к колебательному характеру возрастания валового внутреннего продукта и без учета, и с учетом временного лага.

Литература

1. Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства. М.: Экономика, 1985. 240 с.
2. <http://A-granberg.narod.ru/modelling/section 9.4 doc>
3. Аллен Рой Дж. Д. Математическая экономия. Перевод с английского. М.: Иностранная литература, 1963. 667 с.
4. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики. СПб, Москва, Краснодар, Лань, 2008. 352 с.
5. Геворкян Э.А. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: МЭСИ, 2012. 79 с.
6. Геворкян Э.А., Трофимов М.В., Шукенбаева А.А. Динамика изменения валового внутреннего продукта в макроэкономической модели воспроизводства с учетом временного лага // Научно-практический журнал «Экономика, статистика и инфор-

матика. Вестник УМО», 2012. № 2. С. 109–112.

7. Геворкян Э.А., Макаров Д.П., Питерсен Д.С. Зависимость валового внутреннего продукта от времени в макроэкономической модели Калецкого с учетом инвестиционного временного лага // Научно-практический журнал «Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО», 2014. № 2. С. 58–60.

8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. М.: ЛКИ, 2008. 320 с.

References

1. Granberg A.G. Dynamic models of a national economy. M.: Ekonomika, 1985. 240 p.
2. <http://A-granberg.narod.ru/modelling/section 9.4 doc>
3. Allen Roy G. D. Mathematical economics. Translation from English. M.: Inostrannaya Literatura, 1963. 667 p.
4. Prasolov A.V. Mathematical methods of economic dynamics. St. Petersburg, Moscow, Krasnodar, Lan, 2008. 352 p.
5. Gevorkyan E.A. Differential equations with lagging argument. M.: MESI, 2012. 79 p.
6. Gevorkyan E.A., Trofimov M.V., Shukenbaeva A.A. Dynamics of variation of a gross domestic product in macroeconomic model of reproduction with account of time lag // Nauchno-Prakticheskiy Zhurnal 'Ekonomika, Statistika i Informatika. Vestnik Umo', 2012. No 2. P. 109–112.
7. Gevorkyan E.A., Makarov D.P., Piteresen D.S. Dependence of the gross domestic product on time in macroeconomic Kalecki's model in view of an investment temporary lag // Nauchno-prakticheskiy Zhurnal 'Ekonomika, Statistika i Informatika. Vestnik Umo', 2014. No 2. P. 58–60.
8. Elsgolts L.E. Differential equations. M.: LKI, 2008. 320 p.