СТРАТЕГИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ НА ПРЕДПРИЯТИИ: ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ СТРАТЕГИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

УДК 621.431.75 + 621.9.08

Илья Вадимович Самарин,
к.т.н., доцент кафедры автоматизации технологических процессов РГУ нефти и газа имени И. М. Губкина
Эл. почта: ivs@gubkin.ru

Андрей Игоревич Орлов,
заместитель директора Центра безопасности РГУ нефти и газа имени И. М. Губкина
Эл. почта: tcb@gubkin.ru

Рассмотрены методы решения задач математического программирования, свойственных стратегическому планированию деятельности организаций. Представлены алгоритмы решения оптимизационных задач по формированию рационального плана методом нормированных функций. Предложен вариант обобщения этого метода.

Ключевые слова: *алгоритм, блок-схема, математическое программирование, многопараметрические функции, нормировка, ограничения, оптимизация, ресурс, последовательные приращения, численные методы.*

Ilya V. Samarin,
PhD in Technical Science, Associate Professor, Department of Automation of Technological Processes, Gubkin Russian State University of Oil and Gas
E-mail: ivs@gubkin.ru

Andrey I. Orlov,
Deputy Director of Security Center, Gubkin Russian State University of Oil and Gas
E-mail: tcb@gubkin.ru

STRATEGIC PLANNING AT THE ENTERPRISE: NUMERICAL OPTIMIZATION METHODS, MULTIVARIATE FUNCTIONS IN PROBLEMS OF STRATEGIC PLANNING

The article deals with the methods of solution of problems of mathematical programming, typical strategic planning activities of the organizations. The algorithms for solving optimization problems for the development of a rational plan method normalized functions are presented. A generalization of this method is sugeste.

Keywords: *algorithm, block diagram, mathematical programming, multi-parameter function, normalization, constraints, optimization, resource, consistent increment, numerical methods.*

Формирование стратегических планов деятельности организаций (министерств, ведомств, фирм, предприятий) связано с постановкой и последующим решением некоторой оптимизационной задачи по выбору рационального плана деятельности в условиях ресурсных ограничений. Примеры подобных задач рассматривались в работах [1–5]. Как правило, это задачи высокой размерности (количество переменных – сотни, тысячи), которые в общем случае решаются на ПЭВМ численными методами оптимизации многопараметрических целевых функций (математического программирования) [6–10]. Поэтому удачный выбор метода оптимизации играет важную роль при практическом стратегическом планировании.

Указанные оптимизационные задачи имеют специфическую особенность, которую необходимо учитывать при создании эффективного метода их решения. *Максимизируемая* целевая функция в таких задачах – как правило, вогнутая, а система ограничений представлена линейными функциями ресурсного типа. Это позволяет применить к решению подобных оптимизационных задач методы *выпуклого* математического программирования – напомним: традиционно классификация методов программирования производится по отношению к задачам минимизации функций.

Рассмотрению таких методов посвящена данная статья. Начнем с наиболее простого частного случая единственного ресурсного ограничения.

1. Метод последовательных приращений

Для установления основной идеи, на которой основан метод последовательных приращений (ПП), рассмотрим две очень простые вспомогательные задачи математического программирования [10].

Первая задача – задача линейного программирования с единственным ограничением:

$$\Psi\left(x_o\right) = \max \Psi\left(x\right) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times x_i\right\} \quad (1)$$

при ограничении

$$g\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \times x_i \le b, \quad (2)$$

где $\alpha_i \ge 0\ \forall\ i = 1,...n$; $\beta_i > 0\ \forall\ i = 1,...n$; $b > 0$;
x – вектор (упорядоченный набор) независимых (оптимизируемых параметров).

Будем предполагать, что среди α_i имеются положительные величины.

Решение задачи (1)–(2) легко получить. Во-первых, совершенно очевидно, что оно реализуется при равенстве левой и правой частей в (2): если допустить противоположное, то при достижении максимума $\Psi(x)$ образуется остаток ресурса, за счет которого можно обеспечить дополнительное приращения любой компоненты x_i, для которой $\alpha_i > 0$, а значит, и приращение целевой функции, т.е. получаем противоречие.

Предложим, что для $i = k$ величина (α_k / β_k) принимает наибольшее значение по сравнению с другими (α_i / β_i).

Определим из (2) x_k (при условии равенства левой и правой частей) и подставим его в выражении для целевой функции Ψ. Получим:

$$\Psi\left(x\right) = \left(\alpha_k / \beta_k\right) \times b + \sum_{i=k}^{n} \beta_i \times \left\{\left(\alpha_i / \beta_i\right) - \left(\alpha_k / \beta_k\right)\right\} \times x_i. \quad (3)$$

Таким образом, приходим к задаче на безусловный экстремум. Очевидно, для $i \neq k$ все x_i следует положить равными нулю, так как

$$\beta_i \times \{(\alpha_i / \beta_i) - (\alpha_k / \beta_k)\} \leq 0$$

и $x_i > 0$ для всех $i \neq k$ приводят к уменьшению значений $\Psi(x)$ по сравнению со случаем $x_i = 0$.

Поэтому получаем простое правило: решение задачи (1)–(2) состоит в концентрации всего располагаемого ресурса b на увеличение только одной переменной x_k; все остальные компоненты вектора x должны иметь минимальные, т.е. нулевые значения.

Легко видеть, что приведенное рассмотрение может быть обобщено на случай любых, а не только неотрицательных, значений α_i при условии, что среди них имеется, по крайней мере, одно положительное.

Теперь рассмотрим более общий случай. Предположим, что $\Psi(x)$ – *нелинейная* вогнутая функция, а единственное ограничение – линейное. Оптимизационная задача записывается в следующем виде:

$$\Psi(x_o) = \max \Psi(x) \qquad (3)$$

при ограничении

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \times x_i \leq b, \qquad (4)$$

где $\beta_i > 0 \ \forall \ i = 1,...n$; $b > 0$.

Решение этой задачи, также как и предыдущей, находится на границе, определяемой ограничением (4). Поэтому ее можно было бы решить при помощи метода Лагранжа. Но для того, чтобы продемонстрировать метод последовательных приближений, мы решим ее другим способом.

Можно предложить следующий алгоритм решения этой задачи. Разобьем ресурс b на малые части Δb и будем последовательно распределять каждую малую порцию ресурса. Так как

$$\Psi(x) = \Psi\left(\begin{matrix} x_1, x_2, ... x_{k-1}, \\ b / \beta_k - \sum\limits_{i \neq k}^{n} (\beta_i / \beta_k) \times x_i, \\ x_{k+1}, ... x_n \end{matrix}\right),$$

где k – индекс компоненты x, для которой величина $\beta_k^{-1} \times \partial\Psi / \partial x_k$ максимальна, то

$$d\Psi(x) = (\Delta b / \beta_k) \times \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - \sum \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - (\beta_i / \beta_k) \times \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right\} \times dx_i = (\Delta b / \beta_k) \times \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - \sum_{i=k}^{n} \beta_i \times \left\{ \beta_i^{-1} \times \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \beta_k^{-1} \times \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right\} \times dx_i;$$

$$k = Arg\left\{ \max_i \left(\beta_i^{-1} \times \partial \Psi(x) / \partial x_i \right) \right\}.$$

Величины, стоящие под знаком суммы, отрицательны или, по крайней мере – не положительны.

Поэтому при распределении малой величины ресурса приходим к задаче, аналогичной рассмотренной выше задачи линейного программирования. Другими словами, оптимальное решение при распределении очередной малой порции Δb ресурса состоит в его концентрации только для увеличения одной k-й компоненты x:

$$x_i^{(t)} = x_i^{(t-1)} \text{ для всех } i \neq k;$$

$$x_i^{(t)} = x_i^{(t-1)} + \Delta b / \beta_k \text{ для } i = k,$$

где t – номер очередной малой порции ресурса (номер шага в процедуре оптимизации);

$$x_i^{(o)} = 0 \text{ для всех } i = 1,...n.$$

Однако, теперь *это правило имеет локальный характер*: следующая малая порция Δb может быть распределена, вообще говоря, на увеличение других компонент вектора x.

В итоге:

$$d\Psi(x_o) = \Delta b \times \sum_{t=1}^{T} \beta_{kt}^{-1} \times \frac{\partial \Psi}{\partial x_{kt}},$$

где $T = [b/\Delta b]$ – количество долей общего ресурса (число шагов);
k_t – индекс оптимальной компоненты x на t-м шаге.

Данная задача с одним ограничением иллюстрирует метод ПП: движение к точке экстремума состоит из последовательности шагов, на каждом из которых происходит приращение *только одной компоненты* вектора оптимального решения. В этом смысле метод ПП напоминает метод локального покоординатного подъема (спуска).

2. Метод нормированных функций для решения задач целочисленного линейного программирования

Метод нормированных функций (МНФ) является обобщением метода ПП на случай многих ограничений. Первоначально он был разработан для решения задач целочисленного математического программирования [6, 10]. Поэтому, отдавая дань традиции, сначала рассмотрим применение МНФ для решения целочисленных оптимизационных задач.

Рассмотрение задачи целочисленного линейного программирования опять начнем с анализа самого простого случая, когда имеется только одно ограничение. Например, рассматривается предприятие, выпускающее n видов продукции при заданных общих затратах на производство; тогда α_i – доход от реализации единицы продукции i-го вида, а β_i – затраты на создание единицы этой продукции.

Формализация задачи аналогична (1)–(2). Основное отличие заключается в том, что теперь на значения x_i наложено дополнительное условие по целочисленности.

Рассуждая так же, как при решении задачи (1)–(2), приходим к выводу, что должно быть

$$x_k = [b / \beta_k], \ x_i = 0 \text{ для всех } i \neq k,$$

где $[a]$ – целая часть числа «a», а значения индекса k определяется из условия:

$$k = Arg\{\alpha_k \times [b / \beta_k] \geq \geq \alpha_i \times [b / \beta_i] \text{ для всех } i \neq k\}$$

При этом $\Psi(x_o) = \alpha_k \times [b / \beta_k]$ и, вообще говоря,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \times x_i = \beta_k \times x_k \leq b.$$

Таким образом, получаем *точное решение* задачи целочисленного линейного программирования с одним ограничением.

Теперь запишем задачу целочисленного линейного программирования с m ограничениями:

$$\Psi(x_o) = \max \Psi(x) = = \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times x_i \right\} \qquad (5)$$

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} \times x_i \le b_j,$$

$$b_j > 0,\ j = 1,...,m \qquad (6)$$

$$x_i \in \{0,1,...\},\ i = 1,...,n, \qquad (7)$$

где $\beta_{ji} > 0$, $b_j > 0$.

Для эвристического обоснования МНФ продолжим анализ содержательной стороны задачи (5)–(7). Положим, что предприятие может выпускать n видов продукции. Для производства изделия i-го вида требуется β_{ji} единиц ресурса (денег, сырья, электроэнергии и т.п.) j-го вида. Общие запасы ресурсов характеризуется вектором b. Требуется выбрать такой ассортимент выпускаемой продукции (определить вектор x), чтобы общая прибыль $\Psi(x)$ была максимальной. При этом прибыль от продажи единицы продукции i-го типа составляет α_i единиц.

При $m > 1$ мы имеем дело не только с бюджетом, но и с другими видами ограниченных ресурсов, например, с трудовыми ресурсами. Причем важно отметить тот факт, что процесс производства [и оптимизации функции $\Psi(x)$] прекращается только в том случае, когда оставшегося количества хотя бы одного ресурса уже недостаточно для создания единицы *любого* вида продукции. Ресурс, явившийся причиной прекращения процесса, будем называть *лимитирующим*. В общем случае лимитирующих ресурсов может оказаться несколько.

Можно говорить о равнозначности (с точки зрения возможности стать причиной прекращения процесса) любого вида ресурса независимо от его физической природы. Но если это так, то полезно иметь единую меру измерения неоднородных ресурсов. Для разнородных по физической природе величин такой мерой может быть только относительная мера.

Таким образом, в силу «равнозначности» каждого вида ресурса приходим к выводу о необходимости его нормировки. Это легко сделать, если принять, например, наличное количество каждого вида ресурса за 100%, а в общем случае: $b > 0$. Коэффициенты β_{ji} подвергаются нормировке по формуле

$$\beta_{ji}^{(t)} = \beta_{ji} \times b / b_j,$$
$$j = 1,...m,\ i = 1,...n. \qquad (8)$$

Наличие верхнего индекса у параметра $\beta_{ji}^{(t)}$ указывает на номер шага в процессе последовательной оптимизации целевой функции.

Применение нормировки (8) и определило название метода – МНФ.

Величину b будем называть приведенным (нормированным) ресурсом. После нормировки неравенства-ограничения примут вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{ji}^{(t)} \times x_i \le b,\ j = 1,...,m. \qquad (9)$$

Основная идея оптимизации по МНФ остается той же, что и для метода ПП: на каждом шаге t процесса последовательного распределения нормированного ресурса необходимо давать приращение только той k-й переменной, которая обеспечивает максимум приращения целевой функции:

$$\Delta\Psi_k^{(t)} =$$
$$= \max_{I_t}\left\{\Delta\Psi_i^{(t)} = \alpha_i \times \left[b / \beta_i^{(t-1)}\right]\right\} =$$
$$= \alpha_k \times \left[b / \gamma_k^{(t-1)}\right], \qquad (10)$$

где

$$\gamma_i^{(t-1)} = \max_j \left\{\beta_{ji}^{(t-1)}\right\},$$
$$j = 1,...m. \qquad (11)$$

В (10) максимизация производится не по всем $i = 1,…n$, а только по тем, которые образуют допустимое множество It:

$$\{It : \beta_{ji}^{(t-1)} < b$$
$$\text{для всех } j = 1,...,m\} \qquad (12)$$

Обратите внимание: в (11) применен оператор max. Т.е. сначала для каждого предполагаемого приращения x_i выбирается наиболее затратный вариант, а затем из всех наиболее затратных выбирается наиболее эффективный [оператор max в (10)].

По мере продвижения к экстремуму количество элементов во множестве I_t уменьшается. Для обозначения этого факта в I_t введен нижний индекс, указывающий номер t шага.

Из (10) и (11) видно, что на произвольном t-м шаге процесса приращения эффективности $\Delta\Psi_i^{(t)}$ вычисляются по некоторому одному *дефицитному* на данном шаге процесса виду ресурса, т.е. по тому виду ресурса, *относительный расход которого на данном шаге процесса распределения максимален*. После увеличения k-й переменной на t-м шаге процесса на величину Δx_k уточняется оставшийся ресурс $b_j^{(t)}$.

$$b_j^{(t)} = b_j^{(t-1)} - \beta_{jk} \times \Delta x_k =$$
$$= b_j^{(t-1)} \times \{1 - \beta_{ji}^{(t)} \times \Delta x_k / b\};$$
$$b_j^{(0)} = b_j,$$

и снова производится нормировка:

$$\beta_{ji}^{(t)} = \beta_{ji} \times b / b_j^{(t)}$$

или

$$\beta_{ji}^{(t)} = \beta_{ji}^{(t-1)} \times b_j^{(t-1)} / b_j^{(t)}.$$

Отметим, что величины $b_j^{(t)}$ и β_{ji} не нормированы: первая из них имеет индекс внизу, у второй отсутствует верхний индекс.

Процесс повторяется до окончания хотя бы одного вида ресурса. Следует отметить, что от шага к шагу дефицитный ресурс может меняться, что следует из неравномерности убывания различных видов ресурсов. При этом количественные соотношения между эффективностями вложения затрат можно записать рекуррентной формулой:

$$\Delta\Psi_{ji}^{(t+1)} = \Delta\Psi_{ji}^{(t)} \times \{1 - \beta_{ji}^{(t-1)} \times \Delta x_k / b\}$$

для всех j, i.

Так как относительная скорость убывания максимальна у дефицитного ресурса ($i = k$), то по мере увеличения k-й переменной наступит момент, когда соответствующий ей элемент $\Delta\Psi_k^{(t)}$ или станет меньше некоторой другой величины $\Delta\Psi_i^{(t)}$, или выполнится одно из ограничений (окончится запас какого-либо вида ресурса). В первом случае произойдет смена наращиваемой переменной (смена вида дефицитного ресурса и вида выпускаемой продукции), во втором – прекращение процесса оптимизации.

Приведенные выше рассуждения основывались на предположении, что $\beta_{ji} > 0$, однако они справедливы и при некоторых $\beta_{ji} \le 0$. Если $\beta_{ji} = 0$, то это означает, что для производства данного вида продукции не требуется сырья j-го вида и, следовательно, процесс производства данного вида продукции (и оптимизации) может продолжаться только по тем видам продукции, для выпуска которых *не требуется* сырья j-го вида. Тем более процесс может продолжаться по производству тех видов продукции, выпуск которых сопровождается пополнением j-го вида сырья (т.е. $\beta_{ji} < 0$).

Заметим, что при решении задач целочисленного программирования обычно полагают $\Delta x_k = 1$; тогда $\Delta\Psi_k^{(t)} = \alpha_k$.

Алгоритм решения задачи (10)–(11) записывается в следующем виде.

Шаг 1. Определяются начальные значения текущих величин:

$$b_j^{(o)} = b_j;\ \beta_{ji}^{(o)} = \beta_{ji} \times b / b_j;$$
$$x_i^{(o)} = 0;\ \Psi_o = 0$$
$$j = 1,..,m; \quad i = 1,...,n.$$

В некоторых работах в качестве параметра b предлагается использовать среднее значение

$$b = \left\{\sum_{j=1}^{m} b_j\right\} / m.$$

Но оно логично, когда все m ресурсов – одного типа, например, финансовые, размещенные в разных источниках. Для разнородных ресурсов при определении среднего значения нарушаются размерности. Поэтому рекомендуется $b = 100$.

Шаг 2 (повторяется в цикле до завершения решения задачи): определяется множество I_t (соотношение 12). Если оказывается, что I_t – не пусто, производится переход к шагу 3; в противоположном случае – к шагу 5.

Шаг 3 (повторяется в цикле до завершения решения задачи): определяется индекс $i = k$ из условия:

$$k = Arg\left(\max_i \left\{\Delta\Psi_i^{(t)} = \alpha_i \times \left[b / \gamma_i^{(t-1)}\right]\right\}\right),$$

где

$$\gamma_i^{(t-1)} = \max_j \left\{\beta_j^{(t-1)}\right\}, j = 1,...n$$

В случае равенства $\Delta\Psi_k^{(t)}$ для некоторого множества индексов определяется $\min\{\gamma_k^{(t-1)}\}$, что соответствует распределению малыми порциями и обеспечивает, как правило, хорошее качество решения.

Шаг 4 (повторяется в цикле до завершения решения задачи): пересчет значений текущих параметров:

$$x_i^{(t-1)}, \text{если } i \ne k$$
$$x_i^{(t)} = x_i^{(t-1)} + 1, \text{если } i = k$$
$$b_j^{(t)} = b_j^{(t-1)} - \beta_{jlt}, j = 1,..,m,$$
$$\beta_{ji}^{(t)} = \beta_{ji} \times b / b_j^{(t)} = \beta_{ji}^{(t-1)} \times b_j^{(t-1)} / b_j^{(t)};$$
$$(j = 1,..,m,\ i = 1,..,n).$$
$$\Psi_t = \Psi_{t-1} + \alpha_k;\ t := t + 1$$

Шаг 5: завершить цикл по t и вывести результаты решения задачи целочисленного линейного программирования.

Блок-схема указанного алгоритма представлена на рис. 1, где L – количество элементов множества I_t. Этот

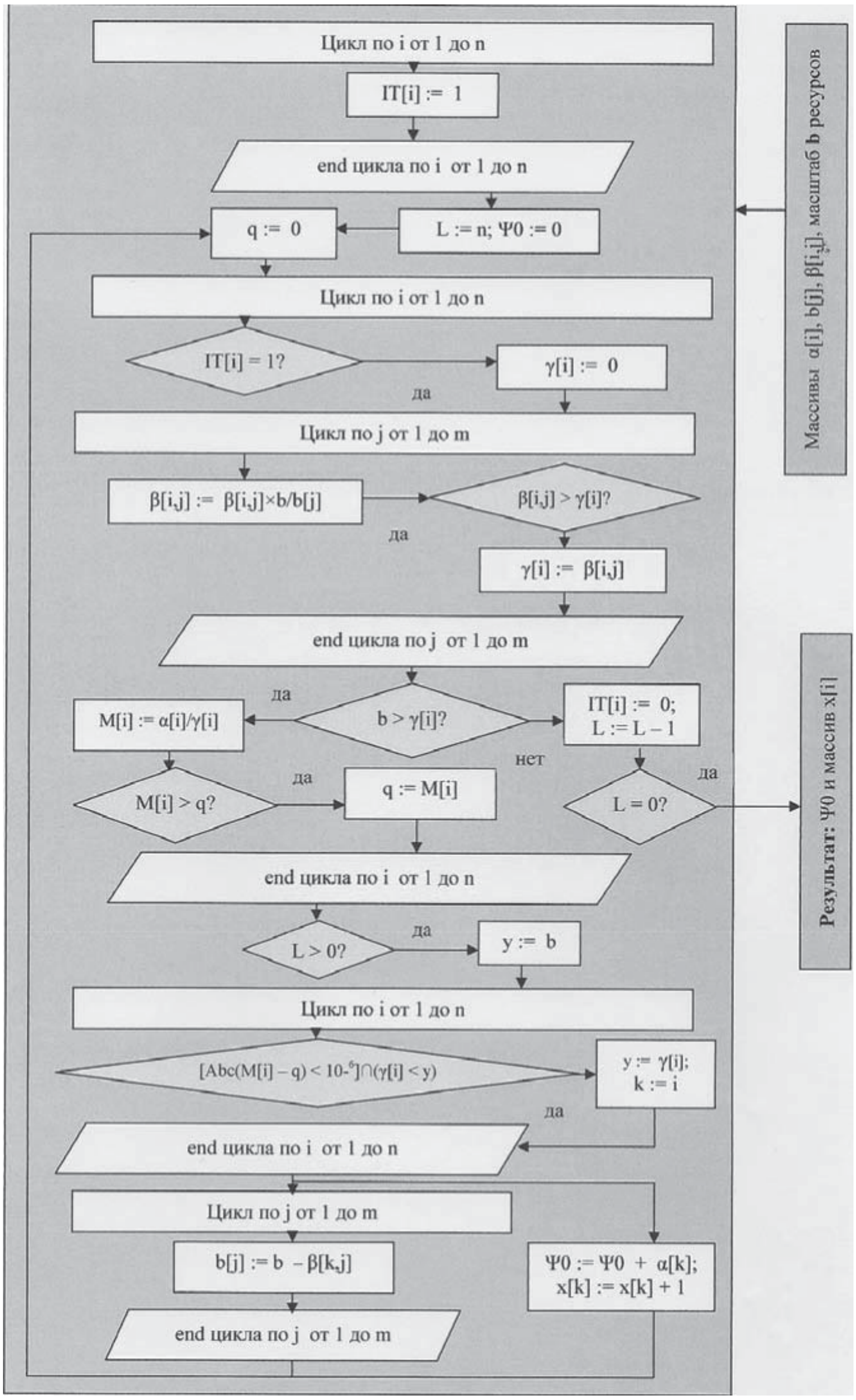

Рис. 1. *Блок-схема алгоритма МНФ для линейной Ψ*

алгоритм является базовым в том смысле, что на его основе могут быть сформированы алгоритмы решения не только задач целочисленного выпуклого программирования, но и решения аналогичных задач в которых переменные могут принимать любые неотрицательные значения.

Данный алгоритм основан на *последовательном* распределении ресурсов. Это определяет основное отличие МНФ от классического метода решения задачи линейного программирования – симплекс-метода [7,8]. МНФ избавлен от необходимости введения дополнительных переменных и перехода от неравенств к равенствам, хотя эти переменные и определяются автоматически в конце процесса, как величины невязок неиспользованного ресурса j-го вида.

В целочисленном линейном программировании все невязки могут быть отличны от нуля, что невозможно в линейном программировании. По этой причине в целочисленных задачах число переменных, отличных от нуля, может оказаться больше числа *базисных* переменных.

3. Метод нормированных функций для решения задач целочисленного выпуклого программирования

В работе [6] МНФ предложено применять для решения задач целочисленного выпуклого программирования не только с линейными функциями $\Psi(x)$ и $g(x)$, но с функциями более общего вида – аддитивными. По нашему мнению, условие аддитивности, конечно, облегчает проведение вычислений, но оно не обязательно. Поэтому ниже мы рассмотрим МНФ применительно к задачам выпуклого программирования достаточно общего вида. Решение таких задач может быть сведено к рассмотренному выше алгоритму. Приведен его применительно к задаче *максимизации вогнутой* функции $\Psi(x)$, в которой размерность вектора x равна n:

$$\Psi(x_o) = \max \Psi(x)$$

при m ограничениях

$$g(x) \le \mathrm{b},$$

где $g(x)$ – выпуклые функции.

Уместно еще раз напомнить, что максимизация вогнутой функции $\Psi(x)$ эквивалентна минимизации выпуклой функции $[-\Psi(x)]$; это обстоятельство и определило название этого вида оптимизационных задач.

Будем полагать, что для всех $i = 1,...n$ и $j = 1,...m$

$$g(0) = 0,\ \Psi(0) = 0,$$

где 0 – нуль-вектор.

Нетрудно показать, что это условие не сужает общности, особенно, если все функции $g(x)$ и $\Psi(x)$ неотрицательны, что и допускается. Для применения МНФ условие $g(0) = 0$ *обязательно*, так как ставит при нормировке все ограничивающие функции в *равные исходные условия*, что обеспечивает однозначность решения.

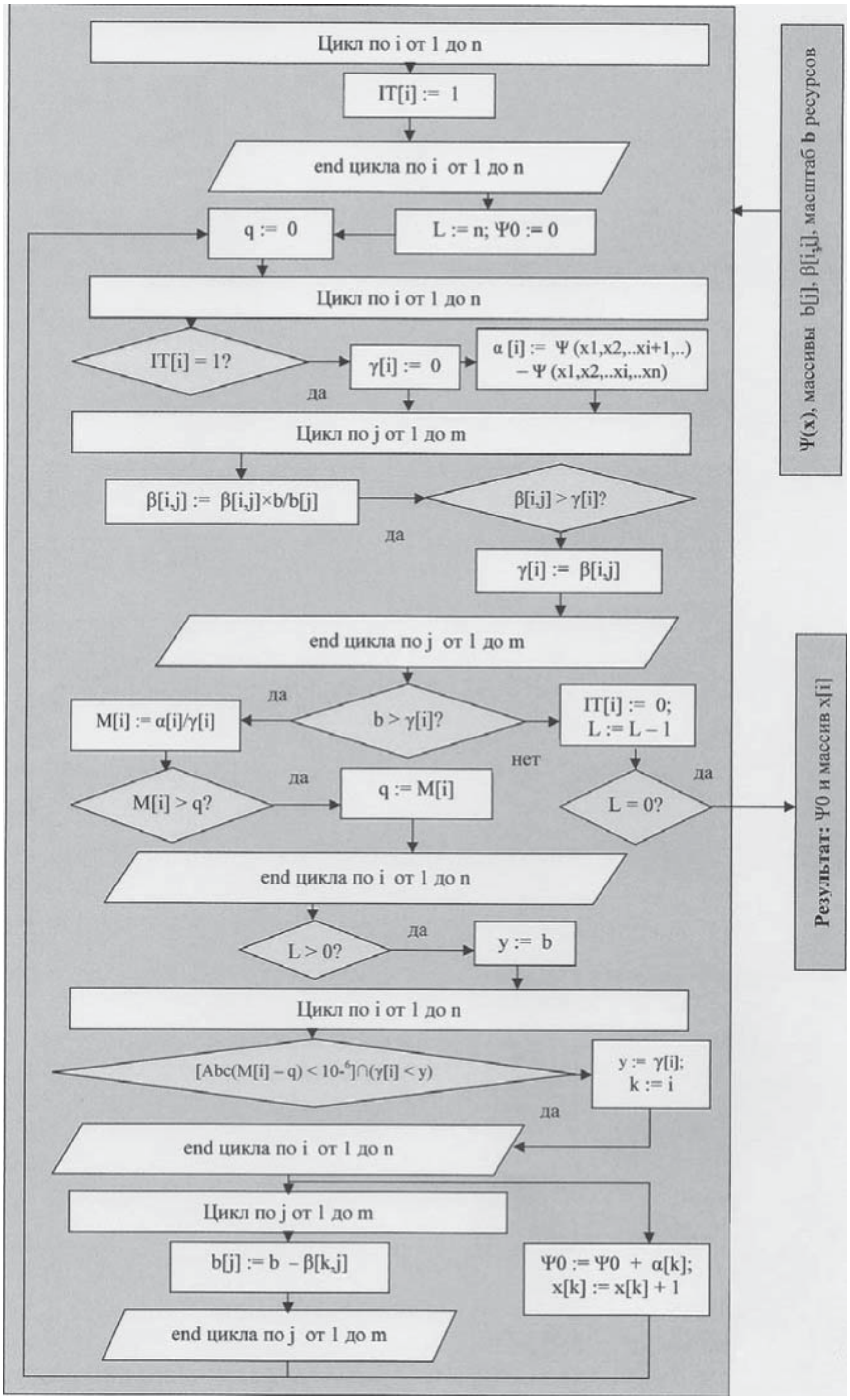

Рис. 2. *Блок-схема алгоритма МНФ для нелинейной Ψ*

Шаг 1. Определяются начальные значения текущих величин:

$$b_j^{(o)} = b_j;\ x_i^{(o)} = 0;\ \Psi_o = 0,\ t = 0.$$

$$j = 1,..,m; \quad i = 1,..,n.$$

Шаг 2. (повторяется в цикле до завершения решения задачи): $\forall i = 1,...n, j = 1,...m$ определяется параметры α_i, β_{ji} и производится нормировка:

$$\alpha_i = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1},..x_n) - $$
$$- \Psi(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1},..x_n)$$

$$\beta_{ji} = g_j(x_1, x_2,\ldots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1},..x_n) -$$
$$- g_j(x_1, x_2,\ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1},..x_n)$$

$$\beta_{ji}^{(t)} = \beta_{ji} \times b / b_j.$$

Шаг 3. (повторяется в цикле до завершения решения задачи) аналогичен шагу 2 в задаче целочисленного линейного программирования: определяется множество I_t (соотношение 12). Если оказывается, что I_t – не пусто, производится переход к шагу 4; в противоположном случае – к шагу 6.

Шаг 4. (повторяется в цикле до завершения решения задачи) аналогичен шагу 3 в задаче целочисленного линейного программирования: определяется индекс $i = k$ из условия:

$$k = Arg\left(\max_i \left\{\Delta\Psi_i^{(t)} = \alpha_i \times \left[b / \gamma_i^{(t-1)}\right]\right\}\right),$$

где

$$\gamma_i^{(t-1)} = \max_j \left\{\beta_j^{(t-1)}\right\}, j = 1,...n$$

В случае равенства $\Delta\Psi_k^{(t)}$ для некоторого множества индексов определяется $\min\{\gamma_k^{(t-1)}\}$, что соответствует распределению малыми порциями и обеспечивает, как правило, хорошее качество решения.

Шаг 5. (повторяется в цикле до завершения решения задачи) аналогичен шагу 4 в задаче целочисленного линейного программирования: пересчет значений текущих параметров:

$$x_i^{(t-1)}, \text{ если } i \neq k$$

$$x_i^{(t)} = x_i^{(t-1)} + 1, \text{ если } i = k$$

$$b_j^{(t)} = b_j^{(t-1)} - \beta_{jlt}, j = 1,..,m,$$

$$\Psi_t = \Psi_{t-1} + \alpha_k;\ t : = t + 1$$

6. Завершить цикл по t и вывести результаты решения нелинейной задачи целочисленного выпуклого программирования.

Блок-схема этого алгоритма представлена на рис. 2.

4. Обобщения метода нормированных функций

МНФ имеет очень важное для практического применения свойство: он может применяться не только для решения задач целочисленного программирования, но и обычных (не целочисленных) оптимизационных задач со сложной структурой ограничений.

Действительно, предположим: необходимо определить компоненты y_i оптимального вектора y с точностью 10^{-3}. Положим $x_i = (10^3 - 10^4) \times y_i$ и будем считать далее x_i целочисленными переменными.

Модифицированную таким образом оптимизационную задачу уже можно рассматривать как задачу целочисленного математического программирования и применить для ее решения МНФ.

После получения оптимального решения для возврата к первоначальным переменным осуществим обратное преобразование $y_i = (10^3 - 10^4) \times x_i$. Блок-схема этой несложной процедуры представлена на рис. 3.

Траектория движения к экстремуму при решении задачи при помощи МНФ будет напоминать траекторию в методе локального покоординатного подъема (спуска) при малых значениях начального шага. При этом ограничения учитываются при помощи специальных штрафных функций, в которых величина налагаемого штрафа – убывающая функция параметров

$$\beta_{ji}^{(t)} = (\partial g_j[x^{(t)}]/\partial x_i) / \{b_j - g_j[x^{(t)}]\};$$

$$i = 1,..n,$$

которые, по аналогии с предыдущим, также обозначены $\beta_{ji}^{(t)}$.

Таким образом, модификация МНФ для решения обычных (не целочисленных) оптимизационных задач приводит к методу, очень похожему на метод локального покоординатного подъема (спуска) для «оштрафованных» целевых функций [10], что, конечно, может рассматриваться как дополнительный аргумент в пользу состоятельности обоих методов.

5. Заключительные замечания

Следует специально указать, что МНФ не имеет строгих формальных обоснований. Поэтому можно привести только качественные доводы, которые способны показать его логическую целесообразность.

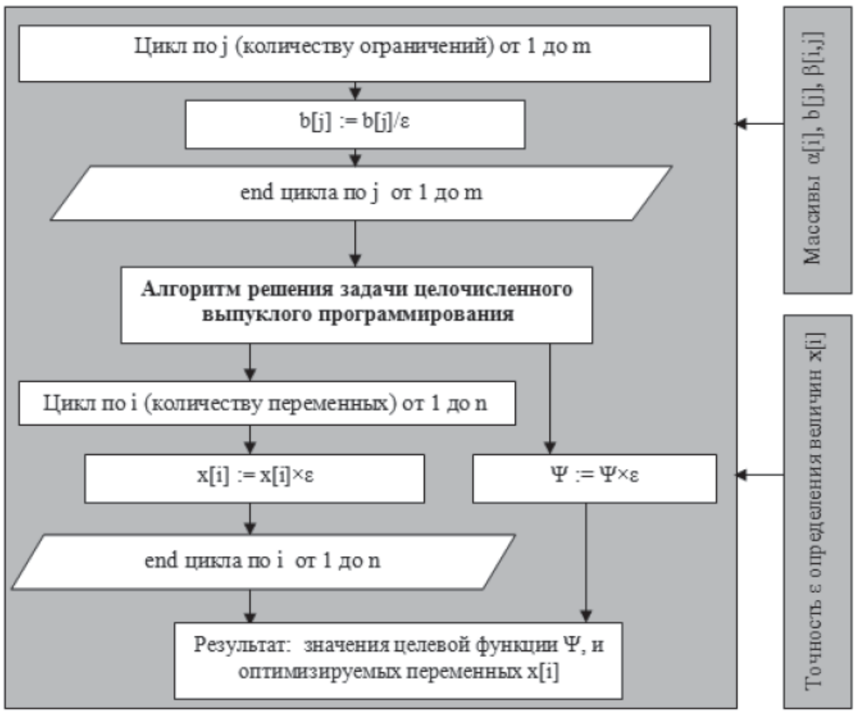

Рис. 3. *Блок-схема алгоритма решения задачи для общего случая независимых переменных*

При наличии одного ограничения МНФ позволяет получить точное решение, так как он вырождается в метод ПП, имеющий строгие формальные основы. В своей эвристической основе и по структуре алгоритмов оба эти метода имеют много общего.

В МНФ на каждом шаге процесса решения задача со многими ограничениями сводится к задаче с одним ограничением. Однако поскольку на каждом шаге процесса мы имеем дело только с одним (дефицитным) видом ресурса, то не можем утверждать, что условия оптимальности будут выполнены точно. Приведенная аналогия с оптимизацией работы предприятия не является строгой и формально не обладает доказательной силой. Она способна лишь увеличить правдоподобность суждений, чего, вообще говоря, недостаточно.

Отсутствие строгих формальных обоснований МНФ или теоретической оценки его точности вынуждает искать приемы и методы, позволяющие контролировать получаемое решение. Такой контроль может осуществляться известными методами линейного программирования, но поскольку речь идет о задачах больших размерностей, то классические методы могут быть полезны лишь для набора статистики в пределах их возможностей.

С другой стороны, с практической точки зрения отсутствие строгих математических доказательств состоятельности и эффективности МНФ для некоторого определенного класса функций не должно являться препятствием для его практического применения. Другие методы, которые имеет подобные доказательства, часто применяются для оптимизации значительно более широкого класса целевых функций, чем это оговорено при доказательстве. Поэтому их состоятельность тоже часто оказывается под большим вопросом.

Естественно, что нет необходимости применять МНФ для решения тех задач, которые могут быть успешно решены с помощью известных алгоритмов и стандартных вычислительных программ. Интерес к МНФ будет возрастать с ростом размерности задач, а также при появлении в них дополнительных ограничений (типа ограничений по целочисленности) и нелинейностей. Именно такие задачи, где другие методы не могут быть пока эффективно использованы, составляют основную область применения МНФ.

Литература

1. Самарин И.В. Стратегическое планирование ОПК: актуальность и научно-методическое обеспечение // «Стратегическая стабильность» №2 (63) – М., Секция «Инженерные проблемы стабильности и конверсии» Российской инженерной академии, Центр проблем СЯС АВН, 2013, с. 67-78

2. Самарин И.В. Формализация задачи обоснования среднесрочного плана деятельности для построения автоматизированной системы управления стратегического планирования на предприятии // ж. «Инновации и инвестиции» № 4 – М., 2014

3. Рябошапко В.А., Фомин А.Н. Основные положения методологии разработки антикризисных целевых программ (часть 1). Вестник Академии военных наук № 4(13) – М.: 4-й филиал Воениздата, 2005.

4. Рябошапко В.А., Фомин А.Н. Основные положения методологии разработки антикризисных целевых программ (часть 2). Вестник Академии военных наук № 1(14) – М.: 4-й филиал Воениздата, 2006.

5. Баскаков В.В., Гудков Б.Н., Федосеев С.А., Фомин А.Н. Методологические основы антикризисного управления и стратегического планирования в экономических системах // МО РФ, Академия военных наук – М., ВА РВСН им. Петра Великого, 2012

6. Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем. Под ред. Золотова Е.В. – М.: Советское радио, 1974.

7. Моисеев Н.Н., Столярова Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации – М., Наука, гл. ред. физ-мат. литературы, 1978

8. Современное состояние теории исследования операций // Под ред. Моисеева Н.Н. – М., Наука, гл. ред. физ-мат. литературы, 1979

9. Теория прогнозирования и принятия решений / Под ред. Саркисяна С.А. – М., «Высшая школа», 1977

10. Баскаков В.В., Федосеев С.А., Фомин А.Н. Научно-методические основы подготовки научно-педагогических кадров // МО РФ, Академия военных наук – М., ВА РВСН им. Петра Великого, 2011

References

1. Samarin I.V. Strategic planning DIC: relevance and methodological support // «Strategicheskaya stabilnost» №2 (63) – M., Sekciya «Inzhenernye problemy stabilnosti i konversii» Rossijskoj inzhenernoj akademii, Centr problem SYaS AVN, 2013, s. 67-78

2. Samarin I.V. Formalization of the problem of substantiating the medium-term plan of activities for building automated control system of strategic planning at the enterprise // zh. «Innovacii i investicii» № 4 – M., 2014

3. Ryaboshapko V.A., Fomin A.N. Main provisions of the anti-crisis development methodology targeted programs (Part 1).Vestnyk Akademii voennyh nauk № 4(13) – M.:, 4-j filial Voenizdata, 2005.

4. Ryaboshapko V.A., Fomin A.N. Main provisions of the anti-crisis development methodology targeted programs (Part 2).Vestnyk Akademii voennyh nauk № 1(14) – M.:, 4-j filial Voenizdata, 2006.

5. Baskakov V.V., Gudkov B.N., Fedoseev S.A., Fomin A.N. Methodological foundations of crisis management and strategic planning in economic systems // MO RF, Akademiya voennyh nauk – M., VA RVSN im. Petra Velikogo, 2012

6. Berzin E.A. Optimal allocation of resources and elements of synthesis systems.Pod red. Zolotova E.V. – M.: Sovetskoe radio, 1974.

7. Moiseev N.N., Stolyarova Yu.P., Stolyarova E.M. Optimization methods – M., Nauka, gl. red. fiz-mat. literatury, 1978

8. Current theory of operations research // Pod red. Moiseeva N.N. – M., Nauka, gl. red. fiz-mat. literatury, 1979

9. The theory of forecasting and decision-making / Pod red. Sarkisyana S.A. – M., «Vysshaya shkola», 1977

10. Baskakov V.V., Fedoseev S.A., Fomin A.N. Scientific and methodological basis of preparation of the teaching staff // MO RF, Akademiya voennyh nauk – M., VA RVSN im. Petra Velikogo, 2011