

Проблемы числовых оценок неравенства

Цель данной работы – сопоставление недостатков распространённых индексов неравенства, проявляющихся при работе с реальными (т.е. заведомо неполными) данными и поиск альтернативных методов количественного описания неравенства, лишенных этих недостатков.

Методика исследования:

- рассмотрение широкого набора как можно более полных реальных данных о распределении населения по доходам, расходам, имуществу (т.е. данных об экономической структуре общества);
- вскрытие специфических недостатков реальных данных об экономической структуре общества, выяснение того, какая именно информация в них отсутствует или представлена непропорционально;
- сравнение значений наиболее широко применяемых индексов неравенства, вычисленных на реальных данных об экономической структуре, с целью установления пригодности этих показателей для задач оценки неравенства.

– разработка индекса неравенства, адекватно описывающего реальные экономические структуры общества.

Материалы, использованные в исследовании:

- официальные данные Росстат и Федеральной Налоговой Службы о доходах граждан России;
- данные специализированных сайтов объявлений о ценах на недвижимость и автомобили;
- данные Credit Suisse Research Institute о распределении граждан России по уровню имущества;
- данные «Форбс» о доходах и имуществе богатейших людей России.

Показано, что данные о доходах существенно неполны и отрывочны – известна ширина диапазона доходов (т.е. доход самого богатого члена общества), но неизвестно наполнение богатых когорт, поскольку доходы богатейших членов общества скрываются.

Предложены критерии, которым должен соответствовать индекс неравенства:

- возможность вычисления индекса неравенства при произвольном квантовании;
- неизменность значения индекса неравенства при различном квантовании одних и тех же данных;

– чувствительность индекса к ширине диапазона доходов.

Для восьми распределений населения по доходам и имуществу построены аппроксимации степенной и экспоненциальной функциями, показана большая адекватность экспоненциальной аппроксимации;

Отмечено, что экспоненциальной функцией распределения хорошо описываются общества только с высоким социальным неравенством (интенсивность экспоненциального распределения больше 10).

Для указанных распределений населения вычислены индексы неравенства:

- децильный коэффициент фондов;
- коэффициент Джини;
- показатель Парето;
- показатели общей энтропии (нулевой, первый или индекс Тейла, второй);
- отношение максимального дохода (имущества) к модальному;
- интенсивность экспоненциального распределения.

Показано, что:

– значение показателя Парето не связано однозначно с неравенством;

– коэффициенты фондов (децильный, квинтильный и т.п.) невычислимы при произвольном квантовании, а потому непригодны при сопоставлении данных из различных источников, отличающихся квантованием;

– индекс Джини требует абсолютно полных данных о богатых; – из всех рассмотренных критериев неравенства первые три показателя общей энтропии, а также отношение максимального дохода (имущества) к модальному сильно зависят от квантования данных, а потому непригодны при сопоставлении данных из различных источников, отличающихся квантованием;

Сделано заключение, что интенсивность экспоненциального распределения не обладает перечисленными недостатками и может быть рекомендована в качестве индекса неравенства.

Ключевые слова: социальное неравенство; индекс Джини; индекс Тейла; показатель Парето; коэффициент фондов; распределение населения по доходам; интенсивность экспоненциального распределения

Viktor A. Kapitanov¹, Anna A. Ivanova², Aleksandra Y. Maksimova²

¹Stelmakh Research Institute «Polyus», Moscow, Russia

²Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk

The problems of numerical inequalities estimates

The purpose of this paper is to compare the shortcomings of the widely used inequality coefficients that appear when working with real (ie, knowingly incomplete) data and searching for alternative quantitative methods for describing inequalities that lack these shortcomings.

Research methods:

- consideration of an extensive range of as full as possible real data on the population distribution by income, expenditure, property (ie data on the economic structure of society);
- revealing the specific shortcomings of these data on the economic structure of society, finding out which information is missing or presented disproportionately;
- comparison of the values of the most widely used indices of inequality calculated on real data on the economic structure, with a

view to establishing the suitability of these indicators for problems of inequality estimation;

– development of an index of inequality that adequately describes the real economic structure of society.

Research data:

- official data of Rosstat and the Federal Tax Service on incomes of Russian citizens;
- specialized sites of announcements about the prices for real estate and cars;
- Credit Suisse Research Institute data on the distribution of Russian citizens by property level;
- Forbes data on income and wealth of the richest people in Russia. It is shown that the income data are essentially incomplete and fragmentary – the width of the income range (i.e., the income of the

richest member of society) is known, but the filling of rich cohorts is not known, since the incomes of the richest members of society are hidden.

We proposed the next (criteria as) requirements for an inequality index:

– possibility of calculating the index of inequality for arbitrary quantization;

– invariance of the value of the inequality index for different quantization of the same data;

– sensitivity of the index to the width of the income range.

It is noted that only the exponential function describes societies with high social inequality enough well (the intensity of the exponential distribution is more than 10).

For the presented population distributions, the next indices of inequality are calculated:

– decile coefficient of funds;

– Gini coefficient;

– Pareto index;

– indicators of total entropy (zero, first or Tayle index, and second orders);

– the ratio of maximum income (property value) to the modal;

– intensity of exponential distribution.

It is shown, that:

– the value of the Pareto index does not have a unique relationship with the inequality;

– the coefficients of the funds (decile, quintile, etc.) are not computable for arbitrary quantization, and therefore are unsuitable for comparing data from various sources and have different quantization;

– The Gini index requires complete data on the rich;

– from all considered criteria of inequality the first three indicators of the total entropy, as well as the ratio of maximum income (property) to the modal strongly depend on data quantization.

Therefore they are unsuitable for comparison data from various sources with different quantization.

It is concluded that the intensity of the exponential distribution does not possess the listed disadvantages and can be recommended as an index of inequality.

Keywords: social inequality; the Gini index; the Teil index; Pareto index; coefficient of funds; distribution of the population by income; intensity of exponential distribution

Введение

Способы представления неравенства можно разделить на две основных группы: графические, когда неравенство отображается более чем одним числом, и числовые, когда показателем неравенства является одно число. Выражение степени неравенства людей в виде числовой характеристики необходимо при решении социо-экономических задач – в первую очередь для сравнения различных групп людей (например, межстранового сравнения), и сравнения по разным показателям (например, по доходам, по имуществу и по расходам) а также для изучения динамики неравенства. Однако при «сворачивании» исходного вектора данных о неравенстве в одно число (будь то коэффициент Джини, фондов или какой-либо другой индекс неравенства) часть информации о неравенстве теряется. Поэтому важно знать, насколько информативен тот или иной критерий.

Сопоставление коэффициента Джини и показателя Парето на примерах реальных данных о доходах разных стран и разных веков, проведённое Н.Т. Давис ещё в середине прошлого века [1], продемонстрировало существенные недостатки этих критериев для оценки реально существующей экономической

структуры общества (ЭСО). По данным [1] страна А по сравнению со страной В могла иметь одновременно меньшее значение коэффициента Джини и большее значение показателя Парето, что ставит вопрос об информативности как минимум одного из этих критериев.

Исследование L. Osberg [2] наглядно показало, что два общества с очень разной экономической структурой могут характеризоваться одним и тем же значением коэффициента Джини.

Наиболее широко для оценки неравенства используются коэффициенты Джини и фондов (децильный, реже квинтильный и центильный). Однако в [3] М.Б. Лощининым аргументированно утверждается следующее: «Вместо решения проблемы структуры (имеется в виду ЭСО – авт.) методологи неравенства разработали технологии контроля, не критичные к структуре. Речь идет о методах Джини и децильных интервалов».

Из этих противоречий и возникает цель данной работы – сопоставление недостатков распространённых индексов неравенства, проявляющихся при работе с реальными (т.е. заведомо неполными) данными и поиск альтернативных методов количественного описания неравенства, лишенных этих недостатков.

Поставленная таким образом цель задаёт следующую методику исследования:

– рассмотрение широкого набора как можно более полных реальных данных о распределении населения по доходам, расходам, имуществу;

– вскрытие специфических недостатков этих данных о неравенстве, выяснение того, какая именно информация в этих данных отсутствует или представлена непропорционально мало;

– вычисление на основе реальных ЭСО значений наиболее широко применяемых индексов неравенства и оценка их пригодности для решения реально существующих задач сравнительной оценки неравенства;

– разработка индекса неравенства, адекватно описывающего реальные ЭСО.

Данная работа является продолжением наших исследований в области методов представления неравенства, начатых в [4].

1. Неустранимые недостатки данных о доходах и/или имуществе

Поскольку полных данных о распределении населения по доходам мы не имеем и иметь не будем, возникает необходимость в работах, подобных настоящей.

Оценим, насколько велико наше незнание: по данным Росстат суммарный доход россиян в 2015 г. составил 53,101 трлн руб. [5], а по данным Федеральной Налоговой Службы (ФНС)¹ – всего лишь 22,053 трлн руб. [6]. Принципиальное отличие данных Росстат от данных ФНС в том, что Росстат оценивает «доходы вообще», т.е. анонимные доходы без привязки их к личностям конкретных получателей [7], ФНС же в силу необходимости выполнения фискальных обязанностей определяет доходы не «вообще», а с привязкой к конкретным получателям, с которых ФНС и взимает налоги.

Из простого сопоставления двух приведённых цифр следует, что доходы скрыть весьма несложно, раз скрываемые доходы в полтора раза больше, чем нескрываемые.

Инструменты сокрытия доходов не являются особым секретом – в условиях глобализации формальный вывод за рубеж расположенного де-факто в России бизнеса не составляет труда: вот, например, сайт, предлагающий подобные услуги [8]. Однако такие инструменты доступны только крупному бизнесу, то есть скрывается информация о доходах не всех, а именно богатых когорт.

Итак, имеющиеся в нашем распоряжении данные о неравенстве по доходам характеризуются существенной неполнотой, причём неполнотой довольно специфической – чем выше доходы, тем меньше информации о них. Из этого недостатка данных следуют два важных для целей данной работы выводы.

¹ Более поздние данные приведены быть не могут, поскольку на момент написания данной статьи последний опубликованный ФНС «Отчет о декларировании доходов физическими лицами» датируется 2015 г. Поэтому для обеспечения сопоставимости данных все прямые (официальные и неофициальные) сведения о доходах в данной статье будут относиться к 2015 г.

Никакой источник данных нельзя считать заслуживающим доверия и только совпадение данных о распределении населения по доходам из нескольких независимых источников может дать нам право считать имеющуюся у нас информацию достоверной. Поскольку подобного рода данные как правило публикуются квантованными, разбитыми на когорты, то исследуемые нами индексы, описывающие неравенство, должны быть нечувствительны к квантованию и вычислимы при любом квантовании – в противном случае невозможно будет сопоставлять данные, полученные из различных источников.

Мы знаем доходы отдельных богатых и даже богатейших граждан страны, публикуемые «Форбс» [9] и ФНС [10], но эти данные недостаточны для полного описания существующей в России ЭСО, поскольку количество богатых людей, скрывших свои доходы и не попавших в поле зрения «Форбс» и ФНС, неизвестно. В такой ситуации приходится признать, что нам доступна информация о ширине диапа-

зона доходов (определяемой доходом богатейшего человека страны), но и только. Достоверных данных о наполнении богатых когорт не существует, есть лишь данные о том, насколько далеко справа на шкале доходов располагаются богатые когорты. Поэтому предлагаемые нами индексы неравенства должны быть безусловно чувствительны к ширине диапазона доходов при любом сколь угодно малом наполнении богатых когорт.

2. Краткое описание имеющихся данных об экономической структуре российского общества

Получение ЭСО из различных прямых и косвенных источников данных и систематизация полученных ЭСО представлены в нашей работе [4]. В некоторых случаях для получения одной ЭСО приходилось сводить данные из нескольких источников, методика проведения этой процедуры описана там же. Список этих восьми ЭСО с указанием их источников и краткими характеристиками данных приведён в табл. 1.

Таблица 1

Распределения населения России по доходам (имуществу)

№	Данные	Источник(и)	Параметр	Краткая характеристика данных	
1	Росстат	[11]	Доходы	Неполны и обрываются на доходе 96 тыс. руб./мес. Показывают заведомо заниженное неравенство.	
2	Росстат + ФНС	[9], [10], [11]		Характеризуют один и тот же диапазон доходов 0...14,3 млрд руб./мес., но отличаются количеством данных о заполнении богатых (>96 тыс. руб./мес.) когорт: в (2) – 675 тыс. чел., а в (3) – 35 чел.	
3	Росстат + «Форбс»	[9], [11]			
4	Credit Suisse	[12]	Имущество	Характеризуют неравенство по всем видам имущества	
5	avtopoisk.ru 24 когорты	[13]		Цена предложения автомобилей.	(5) и (6) отличаются друг от друга только квантованием.
6	avtopoisk.ru 15 когорт	[13]			Цена предложения недвижимости.
7	avito.ru автомобили	[14]		Цена предложения недвижимости	
8	avito.ru недвижимость	[15]			

3. Числовые индексы неравенства

3.1. Требования, предъявляемые к индексам неравенства

Считается, что индексы неравенства должны удовлетворять пяти принципам измерения неравенства [16]:

1. Принцип перераспределения, известный также как принцип Пигу-Дальтона. В соответствии с этим принципом, если деньги передаются от богатого индивида более бедному, то показатель неравенства должен уменьшаться, и наоборот.

2. Принцип независимости от масштаба. Показатель неравенства не должен реагировать на пропорциональные изменения всех доходов.

3. Принцип дублирования наблюдений. Показатель неравенства не должен изменяться при равномерном увеличении исходной выборки.

4. Анонимность. Если два произвольных индивида обмениваются доходами, то показатель неравенства не должен измениться.

5. Аддитивность. Показатель неравенства должен без остатка раскладываться в сумму неравенств внутри отдельных групп и межгруппового неравенства [17].

Не оспаривая перечисленные пять принципов, всё же находим целесообразным добавить к ним ещё три:

6. Возможность вычисления индекса неравенства при произвольном квантовании. Не всегда есть возможность квантовать исходные данные так, как нам нужно, во многих случаях приходится использовать готовое квантование и индекс неравенства при этом должен быть вычислим.

7. Неизменность значения индекса неравенства при различном квантовании одних и тех же данных.

8. Чувствительность индекса к ширине диапазона доходов. Значение индекса должно

изменяться при добавлении к данным о бедных данных о богатых.

Следует отметить, что аддитивность (принцип 5), вообще говоря, не является строгим требованием. Так, очень широко используемый индекс Джини в общем случае не раскладывается без остатка в сумму неравенств внутри отдельных групп и межгруппового неравенства [18 с. 30, 19]. Декомпозиция индекса Джини тем не менее возможна и относительно несложна при разделении населения на группы по уровню дохода «богатые-бедные» [20], хотя и в этом случае речь, конечно, не идёт об аддитивности, т.е. простом суммировании без использования каких-либо коэффициентов при слагаемых.

Если же рассматривается неравенство в пересекающихся по доходам группах [18, с. 16], например, «мужчины-женщины», то задача декомпозиции индекса Джини становится трудноразрешимой. Хотя современные модификации метода Дагума теоретически позволяют решать эту задачу [21], но вопрос в том, какие при этом возникают погрешности. Практическая реализация метода Дагума для пересекающихся групп уже осуществлена [22], однако авторы данной работы указывают на недостаточность публикаций в данной области. Для полной уверенности в пригодности коэффициента Джини для декомпозиции в общем случае нужны дополнительные исследования.

Из сказанного следует, что один из популярнейших (если не наиболее популярный) индекс неравенства Джини — не аддитивен и декомпозиция его в общем случае проблематична, но тем не менее он повсеместно применяется.

Поэтому предлагается исходить из того, что задача декомпозиции индекса неравенства возникает отнюдь не всегда, а потому соблюдение принципа

аддитивности при построении индексов неравенства является скорее желательным, чем обязательным.

Проверим соответствие рассмотренных индексов неравенства другим указанным выше принципам.

Сразу же выведем из рассмотрения критерий Аткинсона [17], поскольку он включает в себя достаточно субъективный параметр отвращения (неприятя) неравенства и в силу этого является скорее социологическим, нежели экономическим индексом.

Широко применяемый в качестве индекса неравенства коэффициент фондов (децильный или, реже, центильный, квинтильный) жёстко привязан к квантованию данных. Если ширины когорт не равны требуемым 1, 10 или 20% (а в действительности именно так зачастую и бывает), то вычислить коэффициент фондов невозможно (табл. 2 столбец 3). Т.о. коэффициент фондов не соответствует шестому требованию, которое мы выдвинули к показателям неравенства.

3.2. Показатель Парето

Показатель Парето в настоящее время не применяется как индекс неравенства и, как будет далее продемонстрировано, отказ от его использования вполне оправдан. В данной работе показатель Парето находили из уравнения степенного распределения [23]

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_{\min}}{x} \right)^{\alpha-1}, \quad (1)$$

где $F(x)$ — значение безразмерной функции распределения¹ населения по уровню дохода; x — безразмерный доход; x_{\min} — минимальный безразмерный доход; α — показатель Парето.

Величину показателя Парето в уравнении (1) варьи-

¹ Необходимость работы именно с функциями распределения как методом графического представления ЭСО обоснована нами ранее [4].

ровали до тех пор, пока не достигал максимума коэффициент детерминации R^2 , который оценивает долю вариации результативного признака y , обусловленную изменением значений факторного признака x . Напомним, что чем ближе значение R^2 к единице, тем больше признак x участвует в формировании значений y [24]. Применительно к данной задаче аппроксимации близость R^2 к единице характеризует близость к реальным данным аппроксимирующей кривой, рассчитанной по формуле (1).

Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Из представленных в табл. 2 данных следует, что показатель Парето демонстрирует большее неравенство для данных Росстат (табл. 2 строка 1) чем для данных о ценах на автомобили (табл. 2 строки 4,5,6), тогда как в действительности ситуация совершенно обратная – данные Росстат обрываются на очень низком доходе и, следовательно, характеризуются очень низким неравенством (см. табл. 1).

Это даёт основания утверждать, что показатель Парето не соответствует принципу Пигу-Дальтона, а проще говоря – вообще не способен од-

нозначно характеризовать неравенство.

Причина подобной неоднозначности в том, что в формулу распределения Парето кроме показателя Парето входит некоторый минимальный (но ненулевой) доход x_{\min} , определение которого само по себе нетривиальная задача (в качестве такового мог бы быть использован модальный доход, но его определение при произвольном квантовании данных затруднено, а его использование ведёт к значительным погрешностям – см. п. 3.6). Поэтому при одинаковых значениях показателя Парето можно наблюдать самые разные кривые распределения населения по доходам и, следовательно, показатель Парето нельзя считать адекватным индексом неравенства – он не соответствует первому принципу. Этот вывод далеко не нов и в целом соответствует данным Н.Т. Давис [1].

3.3. Индекс Джини

Индекс Джини широко распространён в качестве характеристики неравенства, однако в последнее время он подвергается критике [2], поскольку два общества с весьма различными распределениями населения по доходам могут

характеризоваться одним и тем же значением индекса Джини. И это действительно так (см. табл. 2), индекс Джини не отличает данные Росстат от данных Росстат + «Форбс», т.е. не реагирует на расширение диапазона доходов в 149 000 раз, а, следовательно, не удовлетворяет восьмому принципу.

Индекс Джини характеризуется тем же недостатком, что и кривые Лоренца – он требует полных данных о богатых.

3.4. Показатели общей энтропии

Рассмотрим первые три показателя общей энтропии [19] (нулевой, первый или индекс Тейла и второй). Они рассчитаны по формулам (2) – (4) для некоторых из рассматриваемых в данной работе распределений и приведены в табл. 6.

Нулевой показатель общей энтропии равен:

$$GE(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{\bar{x}}{x_i}, \quad (2)$$

где n – число членов общества; i – номер члена общества, получающего безразмерный доход x_i ; \bar{x} – средний безразмерный доход.

Первый показатель общей энтропии (индекс Тейла) равен:

$$GE(1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\bar{x}} \ln \frac{x_i}{\bar{x}}, \quad (3)$$

Таблица 2

Сравнение индексов неравенства

№	Данные	Индекс неравенства								R^2 аппроксимации	
		Фондов децильн.	Джини	α	GE(0)	GE(1)	GE(2)	λ	Imax /mod	Степенной	Экспоненциальной
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Росстат	15,6 ¹	0,38	1,36	0,187	0,241	0,256	2,43	8,03	0,7176	0,9360
2	Росстат + «Форбс»	Вычисление невозможно из-за отсутствия квантования по децилям	0,38	1,36	0,283	0,451	2584	4,85E5	1,19E6	0,9023	0,9775
3	Росстат + ФНС		0,48	1,38	0,436	1,284	4340	2,63E5	1,19E6	0,8631	0,9706
4	Avtopoisk.ru 24 когорты		0,46	1,22	0,415	0,438	0,098	418	680	0,6974	0,9915
5	avtopoisk.ru 15 когорт		0,48	1,25	0,468	0,491	1,125	434	589	0,7617	0,9917
6	avito.ru автомобили		0,53	1,26	–	–	–	217	1290	0,7542	0,9990
7	avito.ru недвижимость		0,55	1,37	–	–	–	1010	1860	0,8259	0,9918
8	Credit Suisse		∞	0,91	1,4	–	–	–	60,8	–	0,8384
9	Невязка 4 и 5 строк	–	4,2%	2,4%	11,21%	10,85%	91,31%	3,7%	14,33%	–	–

¹ Принято по данным Росстат, но вычисление коэффициента фондов по опубликованной Росстат ЭСО невозможно.

Второй показатель общей энтропии равен:

$$GE(2) = \frac{1}{2n\bar{x}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}), \quad (4)$$

Как видно из строки 9 табл. 2, при изменении квантования одних и тех же данных avtopoisk.ru показатели общей энтропии существенно изменяются (строка 9 табл. 2). Таким образом, можно сделать вывод, что показатели общей энтропии зависят от способа квантования исходных данных в значительной степени, чем все остальные рассмотренные индексы неравенства и не удовлетворяют седьмому принципу измерения неравенства.

3.5. Сравнение индексов неравенства

Выполним сравнения значений различных индексов неравенства (см. табл. 2).

Итак, ни один из рассмотренных индексов, а именно индекс Джини, показатель Парето, нулевой, первый и второй показатели общей энтропии и децильный коэффициент (см. табл. 2 столбцы 3...8), не соответствует перечисленным принципам измерения неравенства, причем несоответствие касается важнейших моментов — независимости от квантования, работоспособности при недостаточных данных о заполнении верхних когорт и даже возможности количественного представления неравенства. Есть ли альтернативы?

3.6. Отношение максимального дохода к модальному

В работе [3] М.Б. Лощинным в качестве простейшего критерия неравенства, не подверженного недостаткам, характерным для индекса Джини и децильного коэффициента, предлагается кратность неравенства. Очевиднейшим и простейшим критерием кратности неравенства могло бы стать отношение максимального дохода к минимальному, если бы последний не был нулевым.

Чуть более сложный критерий — отношение максимального дохода к среднеарифметическому — уже вполне вычислим, но его применение означает игнорирование данных о большинстве населения, ведь в силу логнормального характера распределения населения по доходам у большинства людей доход ниже среднеарифметического и наибольшая плотность распределения (мода) приходится на доход существенно ниже среднего.

К примеру, по данным avito.ru [15] модальная цена объекта недвижимости втрое ниже среднеарифметической, а по данным того же сайта о ценах на автомобили [14] модальная цена машины в восемь раз меньше среднеарифметической.

Поэтому представляется целесообразным рассмотреть немного более сложный индекс неравенства — отношение максимального дохода к модальному (далее $I_{\max/\text{mod}}$). Этот критерий прост для вычисления, нагляден, характеризует наиболее распространённую ситуацию с доходами (по определению моды) и безусловно работоспособен при недостаточных данных о заполнении верхних когорт (при частично искаженной информации о доходах богатых субъектов). Его вычисление, очевидно, требует данных о максимальном доходе, но это требование не представляется чрезмерным — без сведений, хотя бы приближительных, о доходах богатейших членов общества изучать неравенство не представляется возможным в любом случае.

Но нахождение модального дохода не представляет затруднений только если в распоряжении исследователя находятся «сырые» неквантованные данные — в таком случае достаточно подробное квантование на равномерной шкале позволит определить положение моды с любой наперед заданной точностью. Однако в настоящей работе

рассматриваются более близкие к реальности ситуации, когда исследованию подлежат уже квантованные (причём на произвольной шкале) данные.

В случае неравномерного квантования максимум населения, приходящийся на данную конкретную когорту, вовсе не говорит о том, что именно эта когорта соответствует модальному доходу — возможно причина в том, что эта когорта просто очень широка.

Поэтому единственный корректный способ определения положения моды в данных, представленных на неравномерных шкалах — это переход к плотностям вероятностей. Практически это означает, что количество людей, приходящихся на каждую доходную когорту, должно быть поделено на ширину когорты в рублях. Модальный доход предлагается считать равным среднему арифметическому левой и правой границ когорты, характеризующейся наибольшей плотностью вероятности.

Проиллюстрируем эту методику на примере данных о ценах на подержанные автомобили с сайта avtopoisk.ru, квантованных на 15 и 24 когорты [13] с использованием в обоих случаях неравномерных шкал (табл. 3).

В табл. 3 строки, соответствующие модам (т.е. когортам с наибольшей плотностью вероятности), выделены жирным шрифтом. Вычисление модальной цены автомобиля как среднеарифметического между правой и левой границами соответствующих когорт, при квантовании на 24 когорты даёт $0,5 \times (321726 + 492585) = 407155$ руб., а при квантовании на 8 когорт — $0,5 \times (310001 + 630000) = 470000$ руб.

Для остальных исходных данных из табл. 1 (кроме данных Credit Swiss, для которых в силу особенностей их представления вычисление моды невозможно, точнее она приходится на точку 0) модальные значения были вычислены по

К определению модальной цены автомобиля

№	Левая граница когорты, руб.	Правая граница когорты, руб.	Ширина когорты, руб.	Кол-во машин, шт.	Плотность распределения, шт./руб.	Левая граница когорты, руб.	Правая граница когорты, руб.	Ширина когорты, руб.	Кол-во машин, шт.	Плотность распределения, шт./руб.
1	0	10000	10000	420	0,04	0	10000	10000	457	0,05
2	10001	25001	15000	1079	0,07	10001	30000	20000	1798	0,09
3	25002	47502	22500	3164	0,14	30001	70000	40000	6527	0,16
4	47503	81253	33750	5977	0,18	70001	150000	80000	15781	0,20
5	81254	131879	50625	9700	0,19	150001	310000	160000	41976	0,26
6	131880	207818	75938	17833	0,23	310001	630000	320000	88603	0,28
7	207819	321725	113906	30833	0,27	630001	1270000	640000	61261	0,10
8	321726	492585	170859	51087	0,30	1270001	2550000	1280000	22444	0,02
9	492586	748875	256289	62218	0,24	2550001	5110000	2560000	7501	2,93E-03
10	748876	1133310	384434	45779	0,12	5110001	10230000	5120000	1749	3,42E-04
11	1133311	1709961	576650	30858	0,05	10230001	20470000	10240000	303	2,96E-05
12	1709962	2574938	864976	9452	0,01	20470001	40950000	20480000	21	1,03E-06
13	2574939	3872402	1297463	4847	3,74E-03	40950001	81910000	40960000	8	1,95E-07
14	3872403	5818598	1946195	2484	1,28E-03	81910001	1,64E+08	81920000	3	3,66E-08
15	5818599	8737892	2919293	968	3,32E-04	1,64E+08	3,28E+08	1,64E+08	1	6,10E-09
16	8737893	13116832	4378939	458	1,05E-04	—	—	—	—	—
17	13116833	19685241	6568408	154	2,34E-05	—	—	—	—	—
18	19685242	29537855	9852613	30	3,04E-06	—	—	—	—	—
19	29537856	44316774	14778919	11	7,44E-07	—	—	—	—	—
20	44316775	66485154	22168378	7	3,16E-07	—	—	—	—	—
21	66485155	99737722	33252567	1	3,01E-08	—	—	—	—	—
22	99737723	1,5E+08	49878851	2	4,01E-08	—	—	—	—	—
23	1,5E+08	2,24E+08	74818276	0	0	—	—	—	—	—
24	2,24E+08	3,37E+08	1,12E+08	1	8,91E-09	—	—	—	—	—

той же методике. Затем для всех этих массивов данных были вычислены индексы неравенства $I_{\max/\text{mod}}$, значения последних приведены в табл. 2.

Данные табл. 2 показывают, что $I_{\max/\text{mod}}$, несмотря на свою примитивность, соответствует всем перечисленным выше принципам измерения неравенства, кроме седьмого — он различает то, что не различается. При изменении квантования одних и тех же данных avtopoisk.ru индекс $I_{\max/\text{mod}}$ существенно изменяется (строка 9 табл. 2) — это связано с погрешностями при определении моды в случае достаточно грубого квантования.

В целом $I_{\max/\text{mod}}$ может быть рекомендован для наглядного, но грубого описания уровня неравенства в обществе.

3.7. Интенсивность экспоненциального распределения

Для ответа на вопрос об альтернативных индексах неравенства необходимо рас-

смотреть характер кривых, аппроксимирующих распределение населения по уровню доходов.

Общепринятой считается логнормальная аппроксимация ЭСО [25,26], однако реальное неравенство настолько глубоко, что левой (восходящей) ветвью логнормального распределения можно пренебречь.

Для иллюстрации этого тезиса приведём полигон относительных частот для цен подержанных автомобилей (рис. 1).

При росте неравенства с некоторого момента распределение населения по доходам описывается уже не логнормальной, а степенной функцией (распределением Парето, рассмотренным в п. 3.2), либо

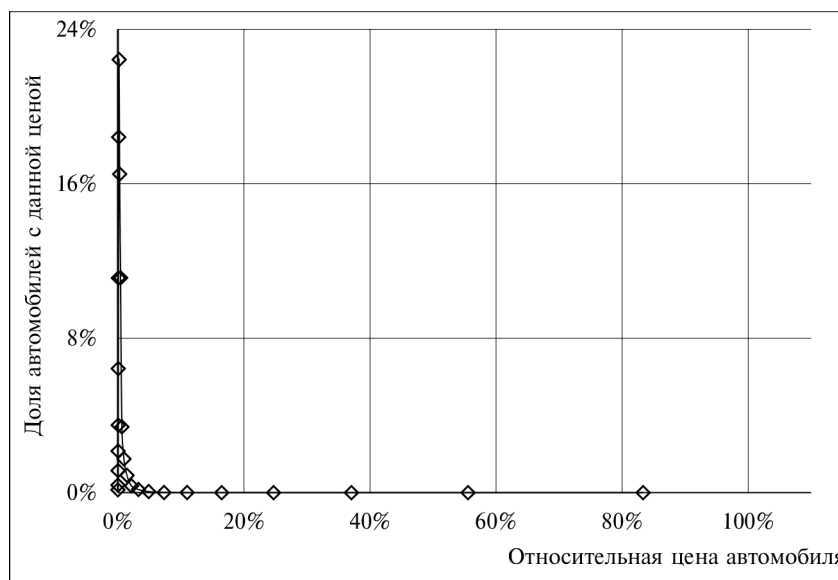


Рис. 1. Полигоны частот распределения цен на автомобили по данным avtopoisk.ru. Квантование на 24 когорты [13].

экспоненциальной, либо их сочетанием.

Аппроксимации ЭСО этими двумя видами кривых широко известны [27, 28], сравним их и мы.

Рассчитаем интенсивность распределения из уравнения экспоненциального распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (5)$$

где $F(x)$ – значение безразмерной функции распределения населения по уровню дохода; x – безразмерный доход; λ – интенсивность распределения.

Величину интенсивности распределения λ в уравнении (5) варьировали до тех пор, пока не достигал максимума коэффициент детерминации, характеризующий близость к реальным данным аппроксимирующей кривой, рассчитанной по формуле (5) (см. табл. 2).

Можно видеть, что при экспоненциальной аппроксимации значения R^2 намного ближе к единице, а значит точность экспоненциальной аппроксимации выше, чем степенной.

Если вынести за скобки случай заведомо заниженного неравенства (данные Росстат, строка 1 табл. 2.), то коэффициент детерминации ЭСО экспоненциальной кривой не опускается ниже 0,927, а в некоторых случаях превышает 0,99.

Эти достаточно большие значения R^2 позволяют считать экспоненциальное распределение вполне адекватной аппроксимацией. А коль скоро экспоненциальная кривая в безразмерном виде характеризуется всего одним параметром – интенсивностью распределения, то интенсивность экспоненциального распределения можно использовать в качестве индекса неравенства.

Использование интенсивности распределения позволяет отличить данные Росстат от Росстат + Форбс (строки 1 и 2 табл. 2), т.е. этот индекс нера-

венства чувствителен к ширине диапазона доходов и вполне может использоваться при недостаточных данных о заполнении верхних когорт.

Из недостатков интенсивности распределения можно отметить разве что некоторую её неочевидность и сложность вычисления (последнее не является проблемой при современном развитии компьютерной техники), поэтому для быстрой и наглядной, хотя и более грубой оценки неравенства можно использовать индекс $I_{\max/\text{mod}}$.

Кроме того, интенсивность распределения не соответствует пятому принципу измерения неравенства – она неаддитивна. Поэтому в случае необходимости декомпозиции неравенства (но только при доступности «сырых» неквантованных данных) целесообразно использовать показатели общей энтропии, включая индекс Тейла.

Во всех же остальных случаях в качестве индекса неравен-

ства лучше предпочесть интенсивность экспоненциального распределения.

3.8. Модельные расчеты экспоненциального распределения

Исследуем поведение экспоненциального распределения (5) на модельных примерах, чтобы изучить другие особенности интенсивности экспоненциального распределения. Безразмерный доход x распределен по экспоненциальному закону.

Моделирование экспоненциального распределения проводилось при значениях коэффициента λ 2.43, 6, 10, 60, 434 и 1010. Часть выбранных значений соответствует значениям интенсивности распределения, полученной для реальных данных, используемых в работе. Графики функции распределения представлены на рис. 2

Как можно видеть из рис. 2, при $\lambda < 10$ значение $F(1) < 1$, что говорит о том, что F перестает быть функцией рас-

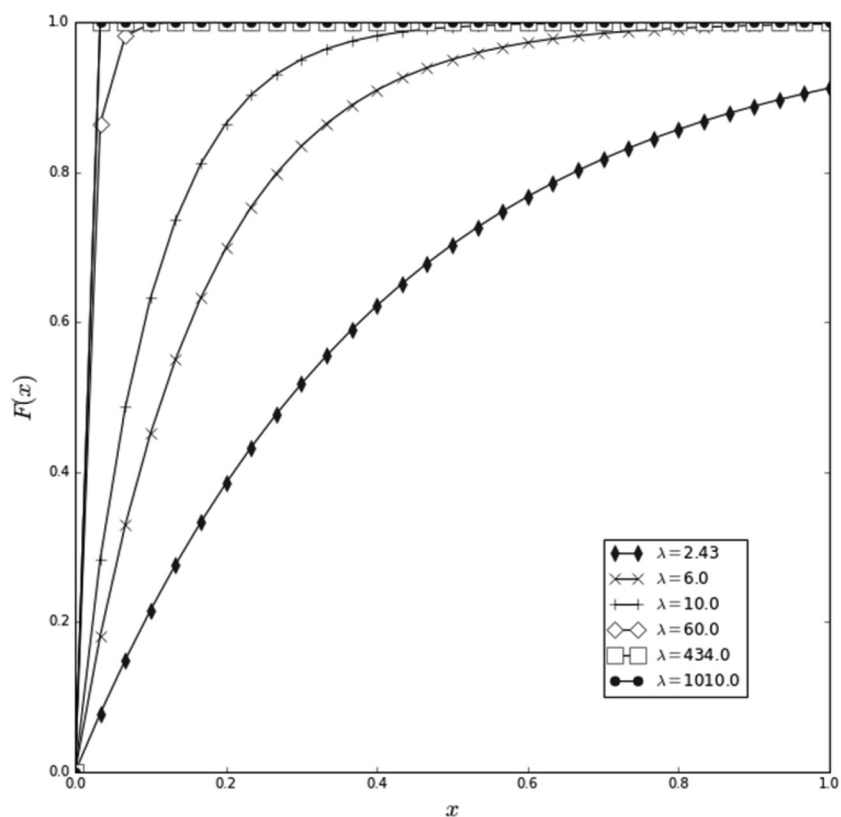


Рис. 2. Функции распределения при различных значениях λ .

пределения, либо о том, что l — не максимальный доход для данной выборки и значения максимального дохода не известны.

По результатам моделирования можно сделать два вывода.

Экспоненциальной функцией распределения хорошо описываются только ЭСО с высоким социальным неравенством.

Значения интенсивности экспоненциального распределения может быть использовано как индикатор неполноты данных (при $\lambda < 10$ мы должны признать, что не располагаем полным описанием ЭСО).

Выводы

1. Рассмотрены данные о распределении населения России по доходам и имуществу, полученные из различных независимых источников.

2. Показано, что данные существенно неполны и отрывочны — известна ширина диапазона доходов (т.е. доход самого богатого члена общества), но неизвестно наполнение богатых когорт, т.е. часть информации о богатых скрыта. Известно также, что информация о доходах части богатых субъектов искажена в сторону занижения.

3. В условиях неполноты и отрывочности необходимо сопоставлять данные из различных источников, в каждом из которых они квантуются различными способами.

4. Предложены критерии, которым должен соответствовать индекс неравенства:

- возможность вычисления индекса неравенства при произвольном квантовании;

- неизменность значения индекса неравенства при различном квантовании одних и тех же данных, т.е. индекс не должен различать то, что не различается;

- работоспособность индекса неравенства при неполных данных о заполнении богатых когорт, т.е. индекс должен быть чувствителен к ширине диапазона доходов, значение индекса должно изменяться при добавлении к данным о бедных данных о богатых, даже если количество этих богатых ничтожно, индекс должен различать то, что различается.

5. Для восьми распределений населения по доходам и имуществу построены аппроксимации степенной и экспоненциальной функциями, показана большая адекватность экспоненциальной аппроксимации.

6. Для указанных распределений населения вычислены индексы неравенства:

- децильный коэффициент фондов;

- коэффициент Джини;
- показатель Парето;
- показатели общей энтропии (нулевой, первый или индекс Тейла, второй);

- отношение максимального дохода (стоимости имущества) к модальному;

- интенсивность экспоненциального распределения.

7. Показано, что показатель Парето не соответствует принципу Пигу-Дальтона, его значение не связано однозначно с неравенством.

8. Показано, что коэффициенты фондов (децильный, квинтильный и т.п.) невычис-

лимы при произвольном квантовании, а потому непригодны при сопоставлении данных из различных источников, отличающихся квантованием.

9. Показано, что индекс Джини требует абсолютно полных данных о богатых. При неполной информации о заполнении богатых когорт он неработоспособен и не различает то, что различается.

10. Показано, что первые три показателя общей энтропии, а также отношение максимального дохода (имущества) к модальному наиболее сильно из всех рассмотренных критериев неравенства зависят от квантования данных, а потому непригодны при сопоставлении данных из различных источников, отличающихся квантованием.

11. Показано, что интенсивность экспоненциального распределения не обладает перечисленными недостатками — она однозначно больше при большем неравенстве, она вычислима при произвольном квантовании и достаточно слабо от него зависит, она чувствительна к ширине диапазона доходов и не требует абсолютно полных данных о заполнении богатых когорт.

12. Экспоненциальной функцией распределения хорошо описываются ЭСО только с высоким социальным неравенством (интенсивность экспоненциального распределения больше 10).

13. Значения интенсивности экспоненциального распределения может быть использовано как индикатор неполноты данных ($\lambda < 10$).

Литература

1. Davis H.T. Political statistic. Evanston, Illinois: The Principia Press of Illinois, 1954. 365 с., С. 195. URL: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015065433917;view=1up;seq=386>
2. Osberg L. "On the limitations of some current usages of the Gini Index" Dalhousie University

References

1. Davis H.T. Political statistic. Evanston, Illinois: The Principia Press of Illinois, 1954. 365 p., P. 195. URL: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015065433917;view=1up;seq=386>
2. Osberg L. "On the limitations of some current usages of the Gini Index" Dalhousie University

Working Paper. April 2016. № 2016-01. URL: <https://www.dal.ca/content/dam/dalhousie/pdf/faculty/science/economics/researcharchives/A%20note%20on%20limitations%20working%20paper.pdf>

3. Лощинин М.Б. Огромное социальное неравенство: общетеоретический и этический аспекты // Экономист. 2012. № 3. С. 30–41.

4. Авторы

5. Федеральная служба государственной статистики. «Россия в цифрах – 2016 г.». «2. 7.6. Денежные доходы и удельный вес расходов в денежных доходах населения (в процентах к общему объему)». URL: http://www.gks.ru/bgd/regl/b16_11/IssWWW.exe/Stg/d01/07-06.doc.

6. Федеральная налоговая служба России. «Отчет о налоговой базе и структуре начислений по налогу на доходы физических лиц за 2015 год, удерживаемому налоговыми агентами по состоянию на 16.01.2017. Раздел II. Суммы доходов физических лиц по данным формы 2-НДФЛ с признаком «1». Раздел III. Сведения о доходах физических лиц (пункт 5 статьи 226, пункт 14 статьи 226.1 НК РФ) по данным формы 2-НДФЛ с признаком «2»». URL: https://www.nalog.ru/rn77/related_activities/statistics_and_analytics/forms/#t1

7. «Информация о методиках расчета показателей, используемых для мониторинга выполнения поручений, содержащихся в Указах Президента Российской Федерации от 07 мая 2012 года № 596-606». П. 42. «Реальные располагаемые денежные доходы населения (процентов)». URL: <http://www.gks.ru/metod/metodika.htm>

8. SAA Finance. «Регистрация компаний. ВНЖ&ПМЖ&Гражданства». URL: <http://saa-finance.com>

9. 200 богатейших бизнесменов России. Форбс. 2015. URL: http://www.forbes.ru/rating/200-bogateishikh-biznesmenov-rossii-2015/2015#all_rating.

10. Федеральная налоговая служба России. «Отчет о декларировании доходов физическими лицами. Раздел 1». 2015. URL: https://www.nalog.ru/rn77/related_activities/statistics_and_analytics/forms/#t1

11. Федеральная служба государственной статистики. «Россия в цифрах – 2016 г.». «7.9. Распределение населения по величине среднедушевых денежных доходов (в процентах к итогу)». URL: http://www.gks.ru/bgd/regl/b16_11/Main.htm.

12. Credit Suisse Research Institute. Global wealth databook 2016. <http://publications.credit-suisse.com/tasks/render/file/index.cfm?fileid=AD6F2B43-B17B-345E-E20A1A254A3E24A5>. «Table 6-5: Wealth shares and minimum wealth of deciles and top percentiles for regions and selected countries, 2016»

13. «Купить б/у авто с пробегом в России.» URL: <http://www.avtopoisk.ru/car?priceCurrency=RUR&state=all&sort=d&sortd=d>

Working Paper. April 2016. No. 2016-01. URL: https://www.dal.ca/content/dam/dalhousie/pdf/faculty/science/economics/researcharchives/A_note_on_limitations_working_paper.pdf

3. Loshchinin M.B. Ogoromnoye sotsial'noye neravenstvo: obshcheteoreticheskiy i eticheskiy aspekty. Ekonomist. 2012. No.3. P. 30–41. (In Russ.)

4. The Authors

5. Federal'naya sluzhba gosudarstvennoy statistiki. «Rossiya v tsifrakh – 2016 g.». «2. 7.6. Denezhnyye dokhody i udel'nyy ves raskhodov v denezhnykh dokhodakh naseleniya (v protsentakh k obshchemu ob'yemu)». URL: http://www.gks.ru/bgd/regl/b16_11/IssWWW.exe/Stg/d01/07-06.doc. (In Russ.)

6. Federal'naya nalogovaya sluzhba Rossii. «Otchet o nalogovoy baze i strukture nachisleniy po nalogu na dokhody fizicheskikh lits za 2015 god, uderzhivayemomu nalogovymi agentami po sostoyaniyu na 16.01.2017. Razdel II. Summy dokhodov fizicheskikh lits po dannym formy 2-NDFL s priznakom «1». Razdel III. Svedeniya o dokhodakh fizicheskikh lits (punkt 5 stat'i 226, punkt 14 stat'i 226.1 NK RF) po dannym formy 2-NDFL s priznakom «2»». URL: https://www.nalog.ru/rn77/related_activities/statistics_and_analytics/forms/#t1 (In Russ.)

7. «Informatsiya o metodikakh rascheta pokazateley, ispol'zuyemykh dlya monitoringa vypolneniya porucheniy, soderzhashchikhsya v Ukazakh Prezidenta Rossiyskoy Federatsii ot 07 maya 2012 goda No. 596-606». P. 42. «Real'nyye raspolagayemyye denezhnyye dokhody naseleniya (protsentov)». URL: <http://www.gks.ru/metod/metodika.htm> (In Russ.)

8. SAA Finance. «Registratsiya kompaniy. VN-ZH&PMZH&Grazhdanstva». URL: <http://saa-finance.com> (In Russ.)

9. 200 bogateyshikh biznesmenov Rossii. Forbs. 2015. URL: http://www.forbes.ru/rating/200-bogateishikh-biznesmenov-rossii-2015/2015#all_rating. (In Russ.)

10. Federal'naya nalogovaya sluzhba Rossii. «Otchet o deklarirovanii dokhodov fizicheskimi litsami. Razdel 1». 2015. URL: https://www.nalog.ru/rn77/related_activities/statistics_and_analytics/forms/#t1 (In Russ.)

11. Federal'naya sluzhba gosudarstvennoy statistiki. «Rossiya v tsifrakh – 2016 g.». «7.9. Raspredeleniye naseleniya po velichine srednedushevykh denezhnykh dokhodov (v protsentakh k itogu)». URL: http://www.gks.ru/bgd/regl/b16_11/Main.htm. (In Russ.)

12. Credit Suisse Research Institute. Global wealth databook 2016. <http://publications.credit-suisse.com/tasks/render/file/index.cfm?fileid=AD6F2B43-B17B-345E-E20A1A254A3E24A5>. «Table 6-5: Wealth shares and minimum wealth of deciles and top percentiles for regions and selected countries, 2016»

13. «Kupit' b/u avto s probegom v Rossii.» URL: <http://www.avtopoisk.ru/car?priceCurrency=RUR&state=all&sort=d&sortd=d> (In Russ.)

14. Avito. «Все объявления в России / Транспорт / Автомобили» URL: <https://www.avito.ru/rossiya/avtomobili#/>
15. Avito. «Все объявления в России / Недвижимость / Квартиры / Продам». URL: <https://www.avito.ru/rossiya/kvartiry/prodam?s=101>
16. Лукьянова А.Л. Динамика и структура неравенства по заработной плате (1998— 2005 гг.): Препринт WP3/2007/06. М.: ГУ ВШЭ, 2007. 68 с. URL: <https://www.hse.ru/pubs/share/direct/document/78807205>.
17. Кислицына О.А. Неравенство в распределении доходов и здоровья в современной России. М.: РИЦ ИСЭПН. 2005. 376 с. С. 37. URL: <http://kislitsyna.ru/data/files/inequality/Glava2.pdf>
18. Coudouel A., Hentschel J., Wodon Q. «Poverty Measurement and Analysis» World Bank, April 2002, Приложение А – Измерение и анализ бедности. Технические примечания. URL: <http://mpr.ub.uni-muenchen.de/10492/>
19. Ощепков А. Ю. Неравенство в заработках: роль профессий: препринт WP3/2011/03 М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2011. 84 с., с.16. URL: <https://www.hse.ru/pubs/share/direct/document/64660294>
20. Ниворожкина Л.И., Арженовский С.В., Сафарова Л.А. Статистическое оценивание уровня неравенства и бедности российских домохозяйств (альтернативный подход на основе декомпозиции коэффициента Джини) // Учет и статистика. 2007. № 2 (10). С. 155-163. URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/statisticheskoe-otsenivanie-urovnya-neravenstva-i-bednosti-rossiyskih-domohozyaystv-alternativnyy-podhod-na-osnove-dekompozitsii>
21. Mussard S., Alperin M. N., Seyte F., Terraza M. Extensions of Dagum's Gini decomposition. International Conference in Memory of Two Eminent Social Scientists: C. Gini and M. O. Lorenz. Their impact in the XX-th century development of probability, statistics and economics. February 2005. URL: https://www.researchgate.net/publication/24130333_Extensions_of_Dagum's_Gini_decomposition
22. Kaya E., Semesen U. Gini Decomposition by Gender : Turkish Case // Brussels Economic Review, ULB -- Universite Libre de Bruxelles, 2010. T. 53(1). С. 59-83. URL: https://www.researchgate.net/publication/227380595_Gini_Decomposition_by_Gender_Turkish_Case
23. Никитин А.П., Чернавская О.Д., Чернавский Д.С. Распределение Парето в динамических системах, находящихся в шумовом поле. РАН. Труды Института общей физики им. А.Н. Прохорова. 2009. Т. 65. С. 107-123.
24. Ишханян М.В., Карпенко Н.В. Эконометрика. Часть 1. Парная регрессия: Учебное пособие. М.: МГУПС (МИИТ), 2016. 117 с. С. 14. URL: <http://ml.mii-ief.ru/Методическая%20литература%20кафедры%20Математика/Ишханян%20>
14. Avito. «Vse ob'yavleniya v Rossii / Transport / Avtomobili» URL: <https://www.avito.ru/rossiya/avtomobili#/> (In Russ.)
15. Avito. «Vse ob'yavleniya v Rossii / Nedvizhmost' / Kvartiry / Prodam». URL: <https://www.avito.ru/rossiya/kvartiry/prodam?s=101> (In Russ.)
16. Luk'yanova A.L. Dinamika i struktura neravenstva po zarabotnoy plate (1998— 2005 gg.): Preprint WP3/2007/06. Moscow: GU VSH · E, 2007. 68 P. URL: <https://www.hse.ru/pubs/share/direct/document/78807205>. (In Russ.)
17. Kislitsyna O.A. Neravenstvo v raspredelenii dokhodov i zdorov'ya v sovremennoy Rossii. Moscow: RITS IS · EPN. 2005. 376 P. P. 37. URL: <http://kislitsyna.ru/data/files/inequality/Glava2.pdf> (In Russ.)
18. Coudouel A., Hentschel J., Wodon Q. «Poverty Measurement and Analysis» World Bank, April 2002, Prilozheniye A – Izmereniye i analiz bednosti. Tekhnicheskiye primechaniya. URL: <http://mpr.ub.uni-muenchen.de/10492/>
19. Oshchepkov A. YU. Neravenstvo v zarabotkakh: rol' professiy: preprint WP3/2011/03 Moscow: Izd. dom Vysshey shkoly ekonomiki, 2011. 84 p., P.16. URL: <https://www.hse.ru/pubs/share/direct/document/64660294> (In Russ.)
20. Nivorozhkina L.I., Arzhenovskiy S.V., Safarova L.A. Statisticheskoye otsenivaniye urovnya neravenstva i bednosti rossiyskikh domokhozyaystv (al'ternativnyy podkhod na osnove dekompozitsii koeffitsiyenta Dzhini). Uchet i statistika. 2007. No. 2 (10). P. 155-163. URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/statisticheskoe-otsenivanie-urovnya-neravenstva-i-bednosti-rossiyskih-domohozyaystv-alternativnyy-podhod-na-osnove-dekompozitsii> (In Russ.)
21. Mussard S., Alperin M. N., Seyte F., Terraza M. Extensions of Dagum's Gini decomposition. International Conference in Memory of Two Eminent Social Scientists: C. Gini and M. O. Lorenz. Their impact in the XX-th century development of probability, statistics and economics. February 2005. URL: https://www.researchgate.net/publication/24130333_Extensions_of_Dagum's_Gini_decomposition
22. Kaya E., Semesen U. Gini Decomposition by Gender : Turkish Case // Brussels Economic Review, ULB -- Universite Libre de Bruxelles, 2010. T. 53(1). P. 59-83. URL: https://www.researchgate.net/publication/227380595_Gini_Decomposition_by_Gender_Turkish_Case
23. Nikitin A.P., Chernavskaya O.D., Chernavskiy D.S. Raspredeleniye Pareto v dinamicheskikh sistemakh, nakhodyashchikhsya v sh·chmovom pole. RAN. Trudy Instituta obshchey fiziki im. A.N. Prokhorova. 2009. Vol. 65. P. 107-123. (In Russ.)
24. Ishkhanyan M.V., Karpenko N.V. Ekonometrika. CHast' 1. Parnaya regressiya: Uchebnoye posobiye. Moscow: MGUPS (MIIT), 2016. 117 P. P. 14. URL: <http://ml.mii-ief.ru/Методическая%20литература%20кафедры%20Математика/Ишханян%20>

МВ,%20Карпенко%20НВ%20Эконометрика%20Часть%201%20Парная%20регрессия.pdf

25. Пирс Д. У. Общ. ред. Словарь современной экономической теории Макмиллана. М.: ИНФРА-М, 2003. 608 с. С. 297

26. Радаев В.В. Экономическая социология. Курс лекций. М.: Аспект Пресс, 1997. 368 с. С. 230

27. Романовский М.Ю., Романовский Ю.М. Введение в экономфизику: статистические и динамические модели. Изд.2-е, испр. и доп. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. 340 с.

28. Banerjee A., Yakovenko V. M., Di Matteo T. A study of the personal income distribution in Australia. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. Physica A 370 (2006) С. 54–59. URL: <http://www2.physics.umd.edu/~yakovenk/papers/PhysicaA-370-54-2006.pdf>

Karpenko NV Ekonometrika CHast' 1 Parnaya regressiya.pdf (In Russ.)

25. Pirs D. U. Obshch. red. Slovar' sovremennoy ekonomicheskoy teorii Makmillana. Moscow: INFRA-M, 2003. 608 P. P. 297 (In Russ.)

26. Radayev V.V. Ekonomicheskaya sotsiologiya. Kurs lektsiy. Moscow: Aspekt Press, 1997. 368 P. P. 230 (In Russ.)

27. Romanovskiy M.YU., Romanovskiy YU.M. Vvedeniye v ekonomofiziku: statisticheskiye i dinamicheskkiye modeli. Ed.2nd. Moscow-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2012. 340 p. (In Russ.)

28. Banerjee A., Yakovenko V. M., Di Matteo T. A study of the personal income distribution in Australia. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. Physica A 370 (2006) P. 54–59. URL: <http://www2.physics.umd.edu/~yakovenk/papers/PhysicaA-370-54-2006.pdf> (In Russ.)

Сведения об авторах

Виктор Анатольевич Капитанов

К.т.н, ведущий специалист,
Бюро инновационных разработок,
Научно-технический отдел
АО «НИИ «Полюс» им. М.Ф. Стельмаха»,
Москва, Россия
Эл. почта: kapitanov_v_a@mail.ru

Анна Александровна Иванова

К.т.н, в.н.с.
Институт прикладной математики и механики,
Донецк
Эл. почта: ivanova.iamm@mail.ru

Александра Юрьевна Максимова

К.т.н., ученый секретарь
Институт прикладной математики и механики,
Донецк
Эл. почта: maximova.alexandra@mail.ru

Information about the authors

Viktor A. Kapitanov

Cand. Sci. (Engineering), Leading Specialist, Bureau
of Innovation Development, Scientific and Technical
Department
Stelmakh Research Institute «Polyus»,
Moscow, Russia
E-mail: kapitanov_v_a@mail.ru

Anna A. Ivanova

Cand. Sci. (Engineering), Leading Researcher
Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk
E-mail: ivanova.iamm@mail.ru

Aleksandra Y. Maksimova

Cand. Sci. (Engineering), Scientific Secretary
Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk
E-mail: maximova.alexandra@mail.ru