

# ОПТИМИЗАЦИЯ РЕКЛАМНЫХ РАСХОДОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

УДК 330.1

**Глеб Валерьевич Каменский,**  
аспирант кафедры «Прикладная математика» Московского государственного университета экономики, статистики и информатики  
Тел.: +7 (903) 539-56-41  
E-mail: kamen88@mail.ru

Данная статья познакомит читателя с возможностью применения производственной функции для оптимизации расходов на рекламу продукции. Во второй части статьи автор рассматривает данные реального предприятия для расчета оптимального рекламного бюджета.

**Ключевые слова:** ABC-анализ, бюджет, метод Лагранжа, оптимизация, производственная функция, функция Кобба-Дугласа.

**Gleb V. Kamenskiy,**  
Post-graduate student, the Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics  
Tel.: +7(903) 539-56-41  
E-mail: kamen88@mail.ru

## OPTIMIZATION OF PROMOTION EXPENSES USING A PRODUCTION FUNCTION

This article describes an opportunity of application of the production function for optimization of promotion expenses. Second part of the article contains a data of a real enterprise to calculate an optimal advertising budget.

**Keywords:** ABC analysis, budget, method of Lagrange, optimization, production function, Cobb-Douglas function.

## 1. Введение

Успешность работы любого предприятия зависит от множества факторов – ассортимента предлагаемых товаров и услуг, насыщенности рынка, маркетинговой или ценовой политики, величины рекламного бюджета и эффективности его расходования. В целях поддержания своей конкурентоспособности современные компании обречены на постоянное улучшение своей деятельности, что требует разработки новых технологий и приемов ведения бизнеса, внедрения новых более эффективных методов управления и организации деятельности.

Что в данном случае можно понимать под «эффективными методами управления»? Это значит достижение максимально возможного результата при имеющихся ресурсах. Данная статья познакомит читателя с преимуществами, которые предоставляет использование математических методов для оптимизации рекламных расходов предприятия.

Но прежде всего читателю предлагается определить значения ключевых слов данной статьи:

*ABC-анализ* – метод, позволяющий классифицировать различные факторы по степени их важности.

*Бюджет* – схема доходов и расходов, устанавливаемая на определенный период времени.

*Метод Лагранжа* – метод нахождения условного экстремума функции  $f(x)$ , где  $x \in R^n$ , относительно  $m$  ограничений  $\phi_i(x) = 0$ , где  $i$  меняется от единицы до  $m$ .

*Оптимизация* – оптимизация системы для повышения ее эффективности.

*Производственная функция* – экономико-математическая количественная зависимость между величинами выпуска и факторами производства.

*Функция Кобба-Дугласа* – зависимость объема производства от создающих его факторов производства.

## 2. Постановка задачи

В моделировании производства зачастую относятся к спросу как к константе, на которую предприятие не в силах повлиять. Однако если компания не будет тратить на рекламу себя и своей продукции, то она не только останется при существующем спросе, но даже потеряет часть своих покупателей. В настоящее время существует множество способов сообщить потенциальным и напомнить уже существующим покупателям о своем товаре. Несмотря на это, зачастую удастся выделить лишь 2-3 наиболее эффективных способа раскрутки своей продукции. В зависимости от направленности деятельности предприятия эти способы могут различаться. К примеру, для увеличения розничных продаж удобней не стоит применять ТВ-рекламу, а следует сосредоточиться на целевых печатных изданиях и выставках. Напротив, для того, чтобы привлечь большее количество «клиентов» в кинотеатр на премьеру фильма наиболее эффективной окажется ТВ- и интернет-реклама. Независимо от того, какие рекламные методы будут применяться, их можно выразить в денежном эквиваленте, как и эффект, приносимый этими методами.

Когда руководство фирмы поняло, что от рекламных расходов никуда не уйти, то возникает следующая проблема: как понести минимальные потери с максимальной эффективностью [1]. Или схожая проблема для маркетинговых отделов крупных компаний: как максимально эффективно потратить существующий рекламный бюджет, и какой бюджет можно было бы считать оптимальным [2]. Для анализа и оптимального распределения средств бюджета маркетингового отдела применим производственную функцию. В экономике чаще всего, для построения производственной функции применяется функция Кобба-Дугласа, имеющая следующий вид:

1.  $Q = a \cdot x_1^b \cdot x_2^c$
2.  $Q$  – результирующая переменная (зачастую объем продаж или прибыль);
3.  $x_1, x_2$  – переменные факторы, оказывающие влияние на результат;
4.  $a, b, c$  – числовые коэффициенты;
5.  $a, b, c > 0$  – коэффициенты неотрицательны;

6.  $b < 1$  и  $c < 1$  – только при таких условиях имеет место убывающая предельная отдача от факторов;

7.  $b + c < 1$  – только при таком условии будет убывающей предельная отдача от бюджета (издержек).

8. Другие величины, необходимые при решении задачи:

9.  $p_1, p_2$  – цены факторов  $x_1, x_2$ ;

10.  $B$  – бюджет;

11.  $B = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$  – бюджет равен издержкам.

3. Практическое применение производственной функции

Для наглядного примера рассмотрим общество с ограниченной ответственностью «Агроторг». Компания ООО «Агроторг» занимается продажей садовой техники. Для продвижения своей продукции, для того, чтобы донести информацию о ней потенциальному покупателю фирма использует различные рекламные методы:

- 1. реклама в сети Internet,
- 2. реклама в тематических печатных СМИ,
- 3. телевизионная реклама,
- 4. участие в профильных выставках,
- 5. размещение рекламных плакатов в крупных городах страны,
- 6. реклама на радио.

Расходы на каждый тип рекламы в целом сопоставимы друг с другом. В таблице 1 приведем расходы на каждый вид рекламы в прошедшем 2011 году.

Путем анализа поступающих заказов и совершения сделок с новыми

контрагентами был выявлен вклад каждого вида рекламы в общее дело продвижения продукции. В таблице 2 приведен вклад каждого вида рекламы:

Можем увидеть, что реклама в сети Internet и печатных СМИ приносит 78% результата, а расходует лишь 36% бюджета. Напротив, участие в профильных выставках, размещение рекламных плакатов и реклама на радио приносит в сумме лишь 7% результата, а расходует 43% бюджета. Для оптимального распределения бюджета применим анализ ABC, часто применяемый в складской логистике. Данный анализ похож на анализ по правилу Парето 80/20, согласно которому лишь пятая часть (20%) от всего количества объектов, с которыми приходится иметь дело, дает примерно 80% результатов этого дела. Вклад остальных 80% объектов составляет только 20% общего результата. Например, в торговле 20% наименований товаров дает, как правило, 80 % прибыли предприятия, остальные 80 %наименований товара – лишь необходимое дополнение, обязательный ассортимент. Но анализ ABC более глубокий, здесь идет разделение факторов на 3 группы.

В данном случае разобьем наши факторы на следующие 3 группы:

- 1. к первой группе отнесем рекламу в сети Internet и печатных СМИ,
- 2. ко второй группе отнесем рекламу на телевидении,
- 3. к третьей группе отнесем участие в профильных выставках, размещение

рекламных плакатов и рекламу на радио.

В 2012 году маркетинговому отделу рекомендуется изменить финансирование разных видов рекламы следующим образом: в 2 раза увеличить финансирование методов первой группы, в 2 раза снизить финансирование второй группы и в 3 раза снизить финансирование третьей группы. Предполагается, что из-за снижения расходов на рекламу во второй и третьей группах не последует существенного снижения продаж, однако при двойном увеличении расходов на рекламные методы первой группы можно ожидать значительного роста выручки. При этом стоит отметить, что рекламный бюджет при этом уменьшится с \$178000 до \$172167.

Сейчас, произведя ABC анализ и выделив наиболее значимые виды рекламы, приступим к проведению анализа их оптимальности с помощью производственной функции.

С целью построения производственной функции в явном формульном виде на протяжении нескольких лет предприятие анализировалось на предмет того, какое влияние оказывают реклама в сети Internet и реклама в печатных СМИ на объем продаж. В результате анализа удалось построить производственную функцию. Она приняла вид функции Кобба-Дугласа:

$$Q = 1750 \cdot x_1^{0,4} \cdot x_2^{0,38}$$

где  $Q$  – изменение объема продаж, вызванное применением рекламы в сети Internet и печатных СМИ за месяц, \$,  
 $x_1$  – количество рекламных акций в сети Internet в течение месяца,  
 $x_2$  – количество рекламных акций в печатных СМИ в течение месяца.

Другие величины, необходимые при решении задачи:

$p_1$  – средняя стоимость одной рекламной акции в сети Internet, \$,

$p_2$  – средняя стоимость одной рекламной акции в печатных СМИ, \$.

$B$  – суммарный бюджет, выделенный для оплаты данных двух видов рекламы.

$B = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$  – бюджет равен издержкам.

Нужно найти оптимальный набор факторов ( $x_1^*, x_2^*$ ), оптимальный бюджет ( $B^*$ ) и соответствующий ему оптимальный результат ( $Q^*$ ). Оптимальность оценивается по предельной эффективности продаж  $\frac{MQ_i}{P_i} = \lambda$ , где

$MQ_i$  – предельный продукт  $i$ -го фактора. Условие оптимальности  $\lambda = 1 + r$ , где  $r$  – банковская ставка процента.

Составляем функцию Лагранжа, берем от нее частные производные, приравняем их к нулю, и решаем полученную систему уравнений при условии заданной величины бюджета ( $B = \text{const}$ ).

Получаем:

$$x_1^* = b \cdot B / (b + c) \cdot p_1$$

$$x_2^* = c \cdot B / (b + c) \cdot p_2$$

Экономический смысл решения – бюджет нужно разделить на две части пропорционально коэффициентам  $b$  и  $c$ , результат поделить на цены факторов. Добавив условие равенства предельной результативной переменной эффективности банковских депозитов ( $MQ_i / p_i = 1 + r$ ), получим оптимальное решение:

$$B^* = (b + c) \cdot \left( \frac{1+r}{a} \cdot \left( \frac{p_1}{b} \right)^b \cdot \left( \frac{p_2}{c} \right)^c \right)^{\frac{1}{b+c-1}}$$

Зная  $B^*$ , можно найти значения ( $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ), а подставив их в производственную функцию, получить оптимальное значение  $Q^*$ .

Теперь вернемся к рассматриваемой задаче.

Представим известные данные задачи в таблице 3:

**Таблица 3. Исходные данные для решения задачи**

$a$	$b$	$c$	$p_1$	$p_2$	$r$
1750	0,4	0,38	390 \$	270 \$	18%

Искомые величины принимают следующие значения:

$$B^* = (0,4 + 0,38) \cdot$$

$$\cdot \left( \frac{1+0,18}{1750} \cdot \left( \frac{390}{0,4} \right)^{0,4} \cdot \left( \frac{270}{0,38} \right)^{0,38} \right)^{\frac{1}{0,4+0,38-1}}$$

$B^* = 8\,839,54$  \$ – оптимальный бюджет;

$$x_1^* = 11,62; x_2^* = 15,95.$$

Легко проверить, что  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = B^*$ .

Округлим:

$$x_1^* = 12; x_2^* = 16.$$

Отсюда оптимальный бюджет равен:  $B^* = 9\,000$  \$.

$Q^* = 13\,560,51$  \$. – оптимальное изменение объема продаж, вызванное применением оптимального объема факторов: рекламы в сети Internet и печатных СМИ.

Подведем итоги:

1. Оптимальным рекламным бюджетом для оплаты рекламы в сети Internet и печатных СМИ является бюджет равный 9 000 \$ в месяц. Годовой бюджет будет равен 108 000 \$. Здесь можем отметить, что часть рекламного бюджета, выделенная для оплаты этих двух видов рекламы в 2011 году, была явно недостаточна.

2. Ежемесячно рекомендуется проводить 12 рекламных акций в сети Internet и 16 рекламных акций в печатных СМИ.

3. При выполнении данных рекомендаций обеспечивается дополнительный прирост объема продаж в размере 162 726,2 \$.

## Заключение

Имея полученные данные в своем распоряжении, у руководителя маркетингового отдела не возникнет проблем в ответе руководству компании на следующие вопросы:

1. Почему необходим именно такой рекламный бюджет?

2. Оптимально ли он будет расходоваться?

3. Что сделано для того, чтобы по возможности снизить рекламные издержки?

Можем сделать вывод, что применение производственной функции для оптимизации расходов может принести не только существенное увеличение прибыли, но и экономию имеющихся ресурсов.

## Литература

1. Репин В.В., Елиферов В.Г. Процессный подход к управлению: Моделирование бизнес-процессов. – М., 2005. – 2-е изд.

2. Родина Л.А. Формирование модели информационного обеспечения управленческой деятельности. – СПб., 2004.

## References

1. Repin V.V., Eliferov V.G. Process approach to management: Modeling of business processes. – Moscow, 2005. – 2nd edition.

2. Rodina L.A. Formation of model of information support of administrative activity. – Saint-Petersburg, 2004.