# ОБОСНОВАНИЕ ЕМКОСТНОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПРОСА

УДК 330.42

**Юрий Александрович Кораблев,**
к.э.н., ст. преподаватель,
Финансовый Университет
при Правительстве
Российской Федерации
(Финуниверситет)
Эл. почта: yura-korablyov@yandex.ru

В статье кратко излагается идея емкостного метода определения скорости потребления продукции (спроса) и дается математическое обоснование этого метода. Показано преимущество этого метода по сравнению с классическим методом восстановления спроса из данных истории продаж по месяцам. Показывается причина низкой точности определения спроса классическим подходом.

***Ключевые слова:*** *емкостный метод, обоснование, спрос, функция скорости потребления, моделирование.*

**Yuri A. Korablev,**
Ph.D., senior Lecturer,
Financial University
E-mail: yura-korablyov@yandex.ru

**ARGUMENTATION OF CAPACITY METHOD DEMAND DETERMINATION**

This article shortly describes idea of capacity method demand determination and give mathematical argumentation of this method. Advantage of this method against classic methods of reconstructing demand from sails history data is shown. The reason of low accuracy of demand determination is described.

***Keywords:*** *capacity method, argumentation, demand, rate of consumption function, simulation.*

Определение спроса (и дальнейшее прогнозирование продаж) является ключевой стандартной проблемой, с которой приходится сталкиваться всем производителям продукции. Для определения спроса и его прогнозирования используются маркетинговые методы. Для определения того, что люди намериваются купить используется: опрос потенциальных покупателей (анкетирование); выявления совокупного мнения торговых работников; изучение мнений экспертов. Для определения того, что люди в действительности покупаю, используется размещение товара на «пробном» рынке. Для определения того, что люди купили, используется статистический анализ временных рядов объемов продаж [1, стр. 1142].

В процессе обработки данных (выделение тренда, сезонной и циклической составляющей) предполагается наличие случайных возмущений (ошибок), соизмеримых с самим прогнозным значением тренда или сезонной составляющей. При выделении трендовой составляющей приходится избавляться от таких ошибок с помощью методов фильтрации, таких как скользящее среднее или экспоненциальное сглаживание. Причинам больших ошибок предполагается наличие множество неучтенных факторов, которые отсутствуют в собранных данных. На самом деле, такие случайные ошибки являются лишь следствием неправильной предварительной обработке данных (во время сбора), а все последующие методы сглаживания всего лишь частично ее уменьшают.

## 1. Краткое описание метода

Каждый покупатель который приходит за товарами представляется как емкость. Во время покупки товара эта емкость заполняется, однако со временем, происходит опустошение емкости (происходит потребление), как будто испарение. Когда такая емкость опустошается, покупатель приходит вновь за товаром и опять наполняет емкость.

Функция скорости потребления запасов продукции восстанавливается из имеющихся у любого производителя данных.

$y_{j,i}$ – объем купленной продукции $j$-тым покупателем ($i$ – порядковый номер совершенной продажи );

$t_{j,i}$ – момент времени совершения $i$-той покупки продукции $j$-тым покупателем.

Отношение $y_{j,i} / (t_{j,i+1} - t_{j,i})$ показывает среднюю скорость, с которой расходовался запас продукции конкретного покупателя $j$ между двумя датами покупки.

Тогда можно определить глобальную **функцию скорости потребления товара** как сумму по всем $n$ покупателям их средних скоростей расхода продукции:

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{j,i}}{t_{j,i+1} - t_{j,i}} \tag{1}$$

где $i$: $t_{j,i} \le t < t_{j,i+1}$

*Функция $F(t)$ определена не на всей оси времени $t$, а лишь там, где есть что суммировать по каждому покупателю, не раньше времени самой первой покупки каждого покупателя, и не позже самой последней покупки, $t \in \left[\max_j t_{j,1}; \min_j t_{j,m_j}\right]$, где $m_j$ – номер последней покупки $j$-того покупателя.*

Функция $F(t)$ показывает скорость потребления продукции всеми покупателями за единицу времени (сутки) в момент времени $t$, индекс $i$ определяется как номер последней покупки, совершенной не позже времени $t$.

Более подробно о таком подходе, об условиях применения данного метода и о дальнейшем прогнозировании можно прочитать в [2]. Большое число различных наглядных моделей потребления лекарственных препаратов и обслуживания населения поставщиками, с последующим восстановлением исходной зависимости потребления из данных продаж рассмотрено в [3], что заставляет признать успех емкостного метода. Определенная зависимость скорости потребления продукции в дальнейшем может использоваться на предприятии, например, для оптимального планирования производства [4].

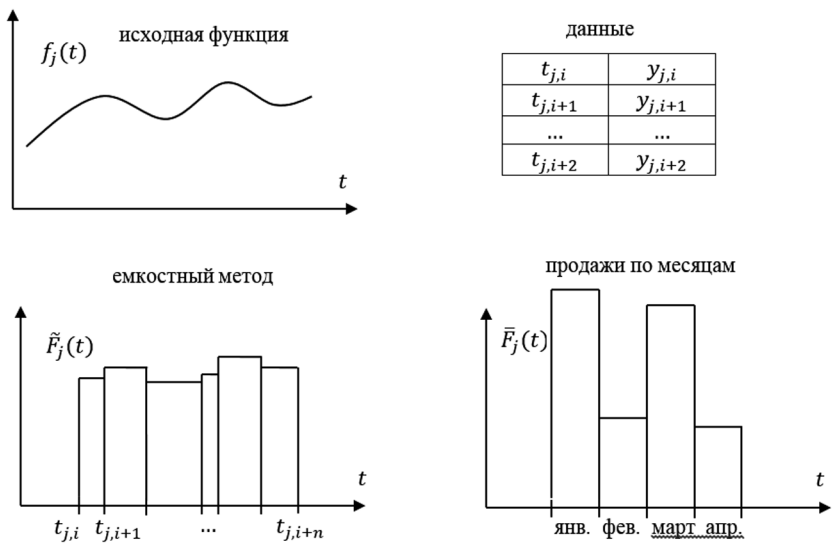


**Рис. 1. Определение скорости потребления продукции**

**Ограничение на поведение оптовых покупателей**

Для того чтобы использовать этот метод желательно чтобы соблюдались следующие ограничения для **поведения покупателей**:

1. Покупатели не избавляются от купленной продукции, т.е. запас убывает только в соответствии с потреблением.

2. Запасов продукции у покупателя всегда достаточно для потребления, т.к. покупатели вовремя пополняют запасы у производителя (покупатели не сдерживают себя из-за того, что временно их запас стал равен нулю).

3. Покупатели преждевременно (повторно) не пополняют запасы продукции, пока они не закончилась (опустилась ниже критического уровня). Например, не должно быть двух закупок подряд (за одну поездку вся продукция не влезла в кузов автомобиля, и покупатель вернулся для совершения второй покупки).

Первые два условия необходимы для того, чтобы искомая функция скорости потребления прослеживалась без искажений через запас продукции (на текущий запас продукции влияет только расход продукции).

Третье условие необходимо для того, чтобы время израсходования запасов продукции потребителей не фиксировалось дважды. Если в короткий промежуток покупатель дважды совершил покупки ($y_{j,i}$; $t_{j,i}$), ($y_{j,i+1}$; $t_{j,i+1}$), то получиться так, что объем продукции $y_{j,i}$ был израсходован за малое время $t_{j,i+1} - t_{j,i}$, что будет ошибочно (большой всплеск на этом периоде). В этом случае надо объединить обе покупки в одну ($y_{j,i} + y_{j,i+1}$; $t_{j,i}$).

Нарушение этих условий приведет к потере точности при определении исходной функции скорости потребления и в дальнейшем прогнозировании. Однако введенные условия в действительности часто выполняются, потому что покупатели действуют рационально (по крайней мере стараются), стремятся минимизировать издержки и максимизировать прибыль. Им не выгодно избавляться от продукции, им выгодно вовремя пополнять запасы, чтобы получить прибыль от дальнейшей продажи, им не выгодно лишний раз совершать поездки к производителю, если на это нет необходимости.

**2. Математическое обоснование**

Может интуитивно и кажется, что такое представление входных данных, намного выигрывает у стандартного подхода, в котором данные суммируются по месяцам (или другим интервалам времени), хорошо бы дать некоторое математическое обоснование почему так происходит, как например это делает Туганов В.Ф., объясняя успех НЭПа 20тых годов 20 века, в своей интереснейшей работе [5]. Возможно мое обоснование преимущества емкостного подхода к анализу данных продаж является не совсем строгим (особенно когда разбирается последний случай, где $\eta_j < 1$), тем не менее оно достаточно наглядно показывает превосходство рассматриваемого метода.

Чтобы показать, что точность определения исходной неизвестной зависимости потребления продукции с помощью описанного метода лучше чем у классического, предположим что исходная зависимость $f_j(t)$ нам известна и сравним среднее квадратичное отклонение обоих методов. Под классическим понимаем тот, в котором происходит суммирование всех продаж за определенный период, например, за каждый месяц, то есть скорость расходования продукции определяется как отношение продаж за месяц к количеству дней в месяце.

Обозначим функцию потребления, определенную с помощью классического подхода как $\bar{F}_j(t)$ (с чертой), а с помощью емкостного метода – как $\tilde{F}_j(t)$ (с волной). Наша задача состоит в том, чтобы определить какая из функций $\bar{F}_j(t)$ или $\tilde{F}_j(t)$ точнее определяет исходную $f_j(t)$. Исходными данными являются пары

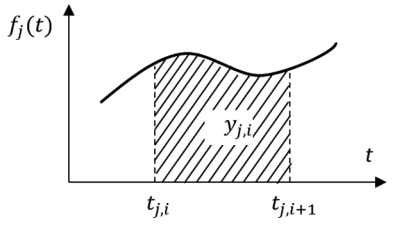


**Рис. 2.** Объем совершенной покупки

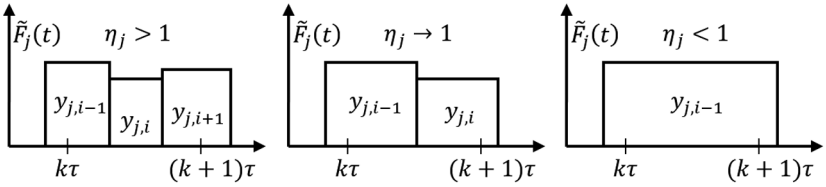


**Рис. 3.** Средняя частота продаж за период

чисел ($y_{j,i}$, $t_{j,i}$) объемов и времени продаж.

Ограничения на поведение покупателей и на вид исходной функции говорят о том, что продукция расходуется только лишь в соответствии с исходной функцией $f_j(t)$. Если продукция расходуется только в соответствии с функцией $f_j(t)$, то тогда объем сделанной покупки $y_{j,i}$ можно выразить как интеграл от этой функции между датами двух покупок, рисунок 2. Другими словами, если $y_{j,i}$ объем продукции купленный в момент времени $t_{j,i}$ и покупатель совершает следующую покупку в момент времени $t_{j,i+1}$ когда этот запас продукции закончился, то значит $y_{j,i}$ расходуется за время между этими двумя покупками. Также можно сказать, что время $t_{j,i+1}$ определяется объемом запаса продукции и скоростью потребления продукции $f_j(t)$.

$$y_{j,i} = \int_{t_{j,i}}^{t_{j,i+1}} f_j(t)\,dt \qquad (2)$$

Разобьем всю ось времени на интервалы шириной $\tau$ (количество дней в месяце). Выберем какой-нибудь интервал $k$ и определим на нем скорость расхода продукции классическим подходом. Для этого просуммируем все продажи за этот период, $\bar{F}_j(t)$ есть суммарные продажи за период $\tau$ деленные на длительность этого периода.

$$\bar{F}_j(t) = \frac{\sum_i y_{j,i}}{\tau} = \frac{\sum_i \int_{t_{j,i}}^{t_{j,i+1}} f_j(t)\,dt}{\tau} \qquad (3)$$

где
$i$: $k\tau \le t_{j,i} < (k+1)\tau$
$k$: $k\tau \le t < (k+1)\tau$

На том же интервале определим скорость расхода продукции с помощь емкостного подхода. $\tilde{F}_j(t)$ – скорость расхода объема продукции $y_{j,i}$ за период от $t_{j,i}$ до $t_{j,i+1}$ (где индекс $i$ выбирается так, чтобы момент времени $t$ оказался внутри этого периода $[t_{j,i}; t_{j,i+1})$:

$$\tilde{F}_j(t) = \frac{y_{j,i}}{t_{j,i+1} - t_{j,i}} = \frac{\int_{t_{j,i}}^{t_{j,i+1}} f_j(t)\,dt}{t_{j,i+1} - t_{j,i}} \qquad (4)$$

где $i$: $t_{j,i} \le t < t_{j,i+1}$.

Далее рассмотрим среднюю частоту покупок $\eta_j$ покупателя за интервал времени $\tau$. Возможны 3 значения частоты покупок $\eta_j$, рисунок 3.

Если покупатель совершает покупки со своей средней частотой $\eta_j$, то тогда время следующей покупки $t_{j,i+1}$ можно выразить через предыдущее $t_{j,i}$.

$$t_{j,i+1} \to t_{j,i} + \frac{\tau}{\eta_j} \qquad (5)$$

Формулы (3) и (4) можно записать в следующем виде:

$$\bar{F}_j(t) = \frac{\sum_i \int_{t_{j,i}}^{t_{j,i+\frac{\tau}{\eta_j}}} f_j(t)\,dt}{\tau} \qquad (6)$$

где
$i$: $k\tau \le t_{j,i} < (k+1)\tau$
$k$: $k\tau \le t < (k+1)\tau$

$$\tilde{F}_j(t) = \frac{\int_{t_{j,i}}^{t_{j,i+\frac{\tau}{\eta_j}}} f_j(t)\,dt}{t_{j,i} + \frac{\tau}{\eta_j} - t_{j,i}} \qquad (7)$$

где $i$: $t_{j,i} \le t < t_{j,i+1}$.

Рассмотрим все три случая для средней частоты продаж $\eta_j$ покупателя. Первый случай, когда $\eta_j > 1$, то есть за интервал времени $\tau$ происходит сразу несколько покупок. Так как сумма определенных интегралов обладает следующим свойством $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$, то для попавших в интервал шириной $\tau$ покупок сумму $\eta_j$ интегралов можно заменить одним интегралом.

$$\sum_i \int_{t_{j,i}}^{t_{j,i}+\frac{\tau}{\eta_j}} f_j(t)\,dt = \int_{t_{j,i}}^{t_{j,i}+\eta_j\frac{\tau}{\eta_j}} f_j(t)\,dt \qquad (8)$$

С учетом (8), формулы для $\bar{F}_j(t)$ примет вид (9), а $\tilde{F}_j(t)$ не изменится:

$$\bar{F}_j(t) = \frac{\int_{t_{j,i}}^{t_{j,i+\tau}} f_j(t)\,dt}{\tau} \qquad (9)$$

где
$i$: $k\tau \le t_{j,i} < (k+1)\tau$
$k$: $k\tau \le t < (k+1)\tau$

$$\tilde{F}_j(t) = \frac{\int_{t_{j,i}}^{t_{j,i+\frac{\tau}{\eta_j}}} f_j(t)\,dt}{\tau / \eta_j} \qquad (10)$$

где $i$: $t_{j,i} \le t < t_{j,i+1}$.

При сравнении $\bar{F}_j(t)$ и $\tilde{F}_j(t)$ для случая $\eta_j > 1$ получается картина как на рисунке 4, $\bar{F}_j(t)$ представляет собой прямую, усредняющую $f_j(t)$

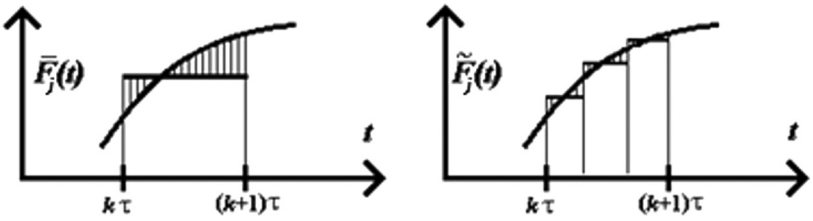


**Рис. 4.** Сравнение ошибки определения исходной функции для случая $\eta_j > 1$

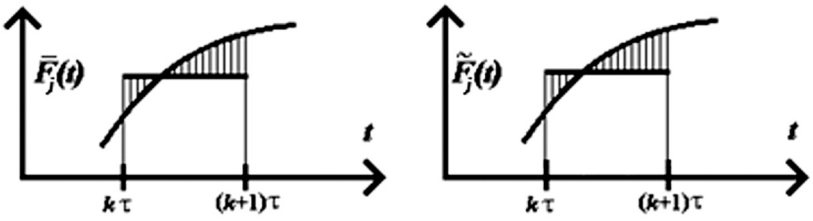


**Рис. 5.** Сравнение ошибки определения исходной функции для случая $\eta_j \to 1$

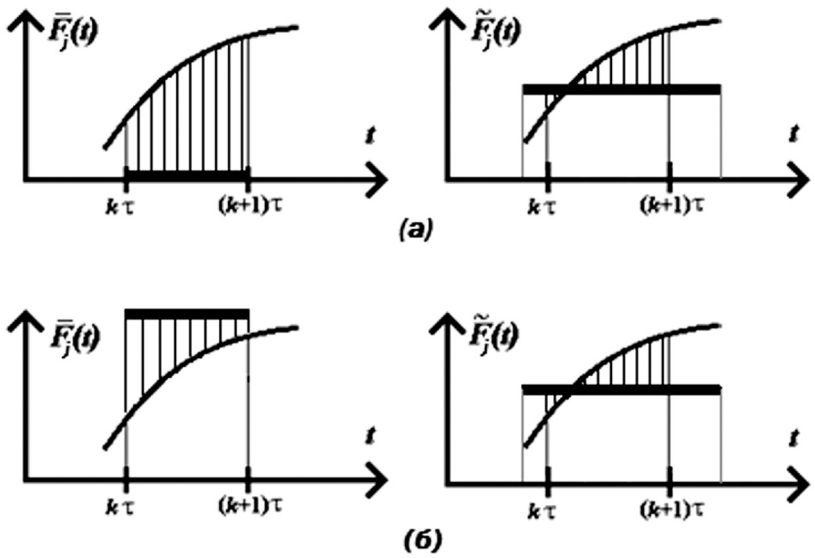


**Рис. 6.** Сравнение ошибки определения исходной функции для случая $\eta_j < 1$

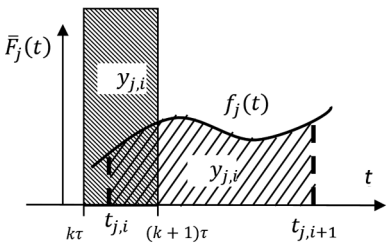


**Рис. 7.** Пример попадания покупки $y_{j,i}$ на интервал $\tau$ для случая $\eta_j < 1$

на всем интервале $\tau$, а $\tilde{F}_j(t)$ усредняет исходную функцию на интервале $\tau / \eta_j$. Для этого случая ошибка определения исходной зависимости будет меньше у функции $\tilde{F}_j(t)$.

Во втором случае, когда $\eta_j \to 1$, то есть за интервал времени $\tau$ происходит только одна покупка, формула (9) для $\bar{F}_j(t)$ не изменится (прямая, усредняющая $f_j(t)$ на всем интервале $\tau$), а в формуле (10) для $\tilde{F}_j(t)$ период времени $\tau / \eta_j$ будет равен также периоду времени $\tau$. В этом случае формулы (9) и (10) будут совпадать, ошибки восстановления исходной зависимости также будут одинаковыми, рисунок 5.

В последнем случае, когда $\eta_j < 1$, за интервал времени $\tau$ может как произойти покупка, так может и не произойти ни одной покупки от покупателя. В формуле (6) $\tau / \eta_j$ будет больше чем $\tau$, но в зависимости от того, попала покупка на интервал или нет, картина может быть похожа на рисунок 6 (а) или (б). Независимо от того, попала ли покупка на интервал $\tau$, функция $\tilde{F}_j(t)$ усредняет функцию $f_j(t)$ за время $\tau / \eta_j$, а функция $\bar{F}_j(t)$ обращается в ноль, если ни одна покупка не попала на интервал $\tau$, и если покупка попала на интервал $\tau$, то $\bar{F}_j(t)$ показывает сильно завышенное значение. Например, если интервал времени $\tau$ месяц, а покупки совершаются раз в три месяца ($\eta_j = 1/3$), то в случае попадания таких покупок в конкретный месяц, $\bar{F}_j(t)$ будет превышать в три раза (интегрирование за время 3 $\tau$) реальное потребления продукции за месяц, рисунок 7.

$$\bar{F}_j(t) = \frac{\int_{t_{j,i}}^{t_{j,i+\frac{\tau}{\eta_j}}} f_j(t)\,dt}{\tau} = \frac{\int_{t_{j,i}}^{t_{j,i+3\tau}} f_j(t)\,dt}{\tau} \qquad (11)$$

где

$i$: $k\tau \le t_{j,i} < (k+1)\tau$

$k$: $k\tau \le t < (k+1)\tau$

а) покупка не попала на интервал $\tau$, б) покупка попала на интервал $\tau$

Получается, что в двух из трех случаях частоты продаж $\eta_j$ ошибка определения исходной зависимости $f_j(t)$ будет меньше у функции $\tilde{F}_j(t)$, рассчитанной с помощью емкостного подхода, а в одном из трех ($\eta_j \to 1$) ошибка одинакова. Поэтому использование нового подхода в условиях когда у каждого покупателя произвольная частота покупок $\eta_j$ будет давать более точные результаты.

При суммировании по всем покупателям $j$, при определении $\bar{F}_j(t)$и $\tilde{F}_j(t)$, относительная средняя ошибка уменьшается. Однако в последнем случае, когда для многих покупателей $\eta_j < 1$, для функции $\bar{F}_j(t)$ может сложится впечатление, что ошибки с разным знаком будут компенсировать друг друга, и итоговая ошибка будет меньше. Например, когда для одного покупателя отсутствуют продажи за период $\tau$, зато присутствуют продажи для другого покупателя, причем в таком объеме, чтобы продажи за этот период соответствовали потреблению обоих покупателей. Исключать этого для какого-нибудь одного периода нельзя, однако ожидать того, что это повторится абсолютно на всех интервалах невозможно. Мало того, такая ситуация все равно искажала бы смысл, продажи за период очень сильно бы зависели от случайности, реальное потребление продукции играло бы второстепенную роль, лишь влияло на то, чтобы эта случайность произошла (продукция одного покупателя закончилась в тот момент, когда у другого еще в наличии). Помимо этого возможны совсем противоположные ситуации, когда ошибки с одинаковым знаками складывались, т.е. на один интервал выпадали большие покупки многих сразу покупателей, создавая неожиданные огромные всплески продаж за этот интервал, обрабатывать которых всегда затруднительно.

Классический подход, когда происходит слепое суммирование продаж по разным покупателям за период времени, очень похож на суммирование площади следов от разных животных на некотором участке земли, рисунок 8. Попытки

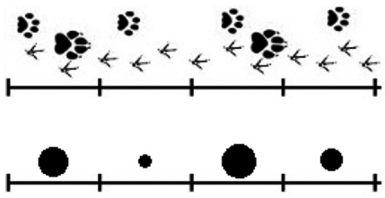

**Рис. 8.** Суммирование площади следов

выявления закономерностей из таких данных будет затруднителен и неточен, закономерность лучше искать, разделяя информацию о покупателях, применяя формулу (1).

**Заключение**

Математически обоснована большая точность определения неизвестной исходной зависимости скорости потребления продукции с помощью емкостного метода, из которой потом без труда можно прогнозировать спрос на продукцию. Эффективность этого метода также подтверждается при моделировании, когда задается исходная функция потребления, моделируются внутренние запасы покупателей и формируется выборка данных, которая играет роль истории продаж, из которой потом восстанавливается исходная функция двумя разными подходами.

В качестве рекомендации хочу сказать, что стоит переходить на емкостный метод расчета скорости потребления продукции всюду где это возможно (собирается статистика продаж содержит идентификатор покупателя). Как правило все условия для такого перехода автоматически выполняются для большинства оптовиков, поэтому причин по прежнему считать продажи по месяцам и пытаться в дальнейшем анализировать полученную информацию нерационально. Конечно существуют некоторые причины, по которой точность определения исходной функции снижается, однако и существуют способы как с этим бороться. Подробнее об этом в других статьях.

**Литература**

1. Котлер Ф., Армстронг Г., Основы маркетинга, 9-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003.

2. Кораблев Ю.А. Емкостный метод определения функции скорости потребления / Экономика и менеджмент систем управления. 2015. Т. 15. № 1.1. С. 140–150.

3. Кораблев Ю.А. Моделирование спроса для организации эффективного планирования производства и продаж фармацевтической продукции / Ю.А. Кораблев // «Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО», М.:МЭСИ. – 2011, №5. – С. 120–123.

4. Кораблев Ю.А., Модель оптимального планирования продаж и производства фармацевтической продукции / Известия ТулГУ. Экономические и юридические науки – Тула: ТулГу. – 2011, Вып. 2. – Ч. 1. – С. 217–225.

5. Туганов В.Ф. Естественный (физический) подход к экономике: факты, физическая экономия и технология ускоренного развития. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: http://uploadrb.ru/upload/users/files/619997/c500dabf0cf4e33549bd6631b4662db7.pdf (дата обращения: 28.05.15).

**References**

1. Kotler F., Armstrong G., Osnovy marketinga, 9-e izdanie.: Per. s angl. – M.: Izdatel'skij dom "Vil'jams", 2003.

2. Korablev Ju.A. Emkostnyj metod opredelenija funkcii skorosti potreblenija / Jekonomika i menedzhment sistem upravlenija. 2015. T. 15. № 1.1. S. 140–150.

3. Korablev Ju.A. Modelirovanie sprosa dlja organizacii jeffektivnogo planirovanija proizvodstva i prodazh farmacevticheskoj produkcii / Ju.A. Korablev // «Jekonomika, statistika i informatika. Vestnik UMO», M.: MESI. – 2011, №5. – C. 120–123.

4. Korablev Ju.A., Model' optimal'nogo planirovanija prodazh i proizvodstva farmacevticheskoj produkcii / Izvestija TulGU. Jekonomicheskie i juridicheskie nauki – Tula: TulGu. – 2011, Vyp. 2. – Ch. 1. – S. 217–225.

5. Tuganov V.F. Estestvennyj (fizicheskij) podhod k jekonomike: fakty, fizicheskaja jekonomija i tehnologija uskorennogo razvitija. [Jelektronnyj resurs]. – Rezhim dostupa: URL: http://uploadrb.ru/upload/users/files/619997/c500dabf0cf4e33549bd6631b4662db7.pdf (data obrashhenija: 28.05.15).