

ВЕКТОРНЫЙ ТРЕНД СТРУКТУРИРОВАННОЙ ЕМКОСТИ РЫНКА

УДК 336.012.23

Александр Николаевич Шабалин,
д.т.н., профессор кафедры «Теория
рыночной экономики и инвестирования», Московский государственный
университет экономики, статистики и
информатики (МЭСИ)
Тел.: 8(495) 442-63-44
Эл. почта: AShabalin@mesi.ru

В работе решается проблема построения модели роста-падения емкостей взаимосвязанных сегментов рынка. Изучаются векторная трендовая модель, обобщающая кривую Гомперца, и возможности ее моделирования в электронной среде Mathcad.

Ключевые слова: векторный тренд, емкость, рынки, взаимодействие, моделирование.

Alexander N. Shabalin,
Doctorate in Technical Sciences, Professor of the Chair "Theory of market economy and investment", Moscow State University of economy, statistics and informatics (MESI)
Tel.: 8 (495) 442-63-44
E-mail: AShabalin@mesi.ru

VECTOR TREND OF THE STRUCTURED MARKET CAPACITY

The Paper presents the model of growth-drops of interrelated market segments capacities. Vector trend model generalizing Gompertz curve is studied. The possibilities of its simulation in Mathcad are shown.

Keywords: vector trend, capacity, markets, interaction, simulation.

1. Введение

Для прогнозирования емкости какого-либо сегмента рыночной экономики ключевое значение имеет выбор или построение модели роста интегрированных показателей спроса во времени и в пространстве. Однако, реальности последних десятилетий демонстрируют многочисленные примеры существенного колебания, а также снижения потребностей со стороны экономического сообщества на целые группы товаров, когда внедрение новых технологий, например, в энергетике, или качественные увеличения встраиваемых в изделие широкого спектра функций, например, в мобильное устройство, снижают спрос на другие товары. И, наоборот, расширяющийся спрос в одном из сегментов рынка образует стимулирующее воздействие для другого сегмента, смежного с ним. Наглядным примером могут служить взаимовлияния емкостей рынка программных и рынка аппаратных средств.

Используемые в прогнозировании функции роста емкости рынка представляются в основном логистической функции и зависимостью, именуемой кривой Гомперца. Последняя функция имеет ряд преимуществ перед логистой, поскольку ее точка перегиба, характеризующая насыщение скорости роста емкости рынка, подвижна в зависимости от параметров модели. Кроме того, кривая Гомперца нашла многочисленные применения в исследованиях технологического прогнозирования, а также в аналитических обоснованиях страховщиков, относящихся к оценке продолжительности жизни клиентов. Подход к построению векторной логистической функции изложен автором в работе [3]. Здесь же рассматривается возможность и необходимость генерации аналогичного построения для кривой Гомперца. Экономико-математические трендовые модели для емкости рынка используют главным образом две детерминированные основы: логистическую и кривую Гомперца. Одновременное применение этих двух основ позволяет в определенной степени защититься от ошибок прогнозирования при оценивании емкости рынка, доли компании на рынке и элементов денежных потоков. Однако, общий недостаток этих моделей в том, что они могут предсказать только монотонный рост емкости рынка, хотя и имеющий состояние насыщения.

2. Векторный тренд на основе логистической функции

Скалярная логистическая функция роста или кривая Перла-Рида [] для емкости рынка здесь представлена в следующей форме:

$$E_{\pi}(t) = \frac{b \cdot E_0}{1 + (b - 1) \cdot e^{-at}}, \quad (1)$$

где

$E_{\pi}(t)$ – значение емкости рынка, возрастающей по логистической зависимости от времени t ;

E_0 – начальное значение емкости рынка;

a – параметр, определяющий темп роста емкости рынка;

b – параметр, характеризующий потенциал роста емкости, т.к. $E_{\pi}(t) \rightarrow b \cdot E_0$ при $t \rightarrow \infty$

При переходе от скалярной функции времени роста емкости рынка к векторному тренду $\vec{E}_{\pi}(t)$, эта емкость структурируется, и каждому сегменту рассматриваемого сегмента приводится в соответствие элемент векторной функции $\vec{E}_{\pi}(t)$. Таким образом структурированная емкость рынка должна удовлетворять требованию предельного перехода, т.е. в частном случае переходить в совокупность скалярных логистических функций. Векторная

логистическая функция, удовлетворяющая этому требованию, является многомерным обобщением скалярной функции роста (1), и имеет вид

$$\vec{E}_n(t) = (I + (B - I) \cdot e^{-t \cdot A})^{-1} \cdot B \cdot \vec{E}_0 \quad (2)$$

где I – единичная матрица;

A – квадратная матрица, элементы которой определяют темпы роста элементов с учетом взаимосвязей емкостей различных составляющих рынка;

$e^{-t \cdot A}$ – матричная экспоненциальная функция, определяемая суммой, равной

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t \cdot A)^k}{k!}$$

B – квадратная матрица, позволяющая характеризовать состояние насыщения в развитии взаимодействующих между собой сегментов рынка.

В частном случае, когда матрицы A и B являются диагональными, что можно интерпретировать как отсутствие взаимодействия между изучаемыми сегментами рынка, матрица $(I + (B - I) \cdot e^{-t \cdot A})^{-1} \cdot B$ становится диагональной и все элементы векторной функции $\vec{E}_n(t)$ и элементы имеют вид зависимости (1), т.е. требование предельного перехода соблюдается.

Заметим, что в случае положительности всех собственных значений матрицы A , $e^{-t \cdot A}$ асимптотически стремится к нулевой матрице для $t \rightarrow \infty$, и будущее значение вектора состояния стремится к состоянию насыщения

$$\vec{E}_n(t) \rightarrow B \cdot \vec{E}_0.$$

Векторная логистическая функция (2), матрицы которой являются диагональными, удовлетворяет правилу предельного перехода, а именно: она переходит в совокупность скалярных моделей вида (1). Элементы матриц, находящиеся вне главной диагонали позволяют учесть взаимные влияния емкостей смежных производств. Например, такие сегменты агробизнеса, как сельхозпроизводство зерна, произ-

водство муки и производство хлеба имеют во времени взаимозависимые емкости.

Когда среди собственных значений матрицы A встречаются комплексные числа, элементы векторного тренда $\vec{E}_n(t)$ могут терять монотонность роста, поскольку содержат в себя волнообразные зависимости от времени t . Возможны также скачкообразные изменения вектора $\vec{E}_n(t)$, обусловленные операцией обращения матрицы $(I + (B - I) \cdot e^{-t \cdot A})^{-1}$, что может интерпретироваться при моделировании как качественное изменение в экономической системе.

3. Векторный тренд на основе кривой Гомперца

Скалярная кривая Гомперца имеет вид

$$E_I(t) = \beta_0 \cdot \exp(-\beta_1 \cdot \exp(-a \cdot t)), \quad (4)$$

где a – параметр, характеризующий скорость роста емкости рынка;

β_0, β_1 – параметры, требующие интерпретации.

Чтобы установить экономический смысл параметра β_0 , найдем асимптотическое значение ёмкости для времени $t \rightarrow \infty$. Имеем

$$E_I(t) \rightarrow \beta_0 = E_{\infty}$$

Таким образом, значение β_0 определяет предел роста емкости рынка.

Начальное значение емкости рынка

$$\begin{aligned} E_0 &= E_I(0) = \\ &= \beta_0 \cdot \exp(-\beta_1 \cdot \exp(-a \cdot 0)) = \\ &= E_{\infty} \cdot \exp(-\beta_1) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\beta_1 = \ln\left(\frac{E_{\infty}}{E_0}\right), \quad (5)$$

т.е. параметр β_1 является показателем потенциала роста емкости рынка.

Итак, в более наглядной форме кривая Гомперца может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_I(t) &= \\ &= E_{\infty} \cdot \exp\left(-\ln\left(\frac{E_{\infty}}{E_0}\right) \cdot \exp(-a \cdot t)\right) \quad (6) \end{aligned}$$

или

$$E_I(t) = \exp(-\ln(b) \cdot \exp(-a \cdot t)) \cdot b \cdot E_0, \quad (6')$$

где параметр b , как и в выше рассмотренной логистической модели равен отношению предела роста ёмкости рынка к ее начальному значению.

Требованию перехода в совокупность кривых Гомперца вида (6') удовлетворяет следующий векторный тренд

$$\begin{aligned} \vec{E}_I(t) &= \\ &= \exp(-\ln(B) \cdot \exp(-t \cdot A)) \cdot B \cdot \vec{E}_0 \quad (7) \end{aligned}$$

$\vec{E}_I(t)$ – структурированная ёмкость рынка, как векторная функция времени, обобщающая кривую Гомперца для изучения взаимосвязанных динамических процессов в смежных сегментах экономики;

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_I(0)$$

B – квадратная матрица, характеризующая взаимосвязанные пределы роста структурированной ёмкости рынка;

$\ln(B)$ – матричный натуральный логарифм, определяемый следующей суммой

$$\ln(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot B^{k+1}}{k+1}.$$

Следует заметить, что условию предельного перехода удовлетворяет и векторные функции, которые являются результатом перестановки матриц в правой части уравнения (7), что требует дальнейших исследований, выходящих за границу данной работы.

4. Векторные тренды в среде Mathcad

Для вычисления матричной экспоненты и матричного логарифма от матриц в работе предлагается использовать спектральное разложение матриц.

Рассмотрим программные конструкции системы представления и обработки знаний Mathcad, которые позволяют находить значения каждого элемента вектора ёмкости многомерной модели Гомперца в зависимости от параметров модели и времени. Экспоненциальная функция от матрицы $t \cdot A$ находится следующим образом

$$\text{Mexp}(A, t) := \text{eigenvecs}(A) \cdot \text{diag}(e^{t \cdot \text{eigenvals}(A)}) \cdot \text{eigenvecs}(A)^{-1}$$

$\text{Mexp}(A, t)$ – функция, определяющая матричную экспоненту матрицы A для момента времени t ;

$\text{eigenvecs}(A)$ – функция, возвращающая квадратную матрицу, составленную из ортонормированных собственных векторов матрицы A ;

$\text{diag}(e^{t \cdot \text{eigenvals}(A)})$ – диагональная матрица, которая на главной диагонали содержит элементы, равные экспонентам произведений соответствующих собственных значений матрицы A на время t .

Аналогично находится натуральный логарифм матрицы B с помощью следующей функции. Здесь уже элементами диагональной матрицы служат натуральные логарифмы собственных значений матрицы B , а именно:

$$\text{Mln}(B) := \text{eigenvecs}(B) \cdot \text{diag}(\ln(\text{eigenvals}(B))) \cdot \text{eigenvecs}(B)^{-1}$$

Матричная функция времени, задающая динамику изменений структурированной емкости рынка в соответствии с уравнением (7), в системе Mathcad имеет следующий вид

$$\text{MgompCr}(A, B, t) := \text{Mexp}(-\text{Mln}(B)) \cdot \text{Mexp}(A, -t) \cdot 1 \cdot B$$

Определенные выше матричные функции вычисляют векторный тренд для многомерной кривой Гомперца с учетом начального уровня структурированной емкости рынка. Обращая внимания на то, что скалярная модель Гомперца нашла свое широкое применение в моделировании не только экономических систем, но и в исследованиях технологий, а также в анализе развития биологических сообществ и социума, начальное значение векторного моделируемого тренда обозначается ниже через y_0 для момента времени t_0 . Векторно-матричная функция для искомого тренда

$$\text{VgompCr}(A, B, t, t_0, y_0) := \text{MgompCr}(A, B, t) \cdot \text{MgompCr}(A, B, t_0)^{-1} \cdot y_0$$

позволяет исследовать процессы роста и падения в означенных выше

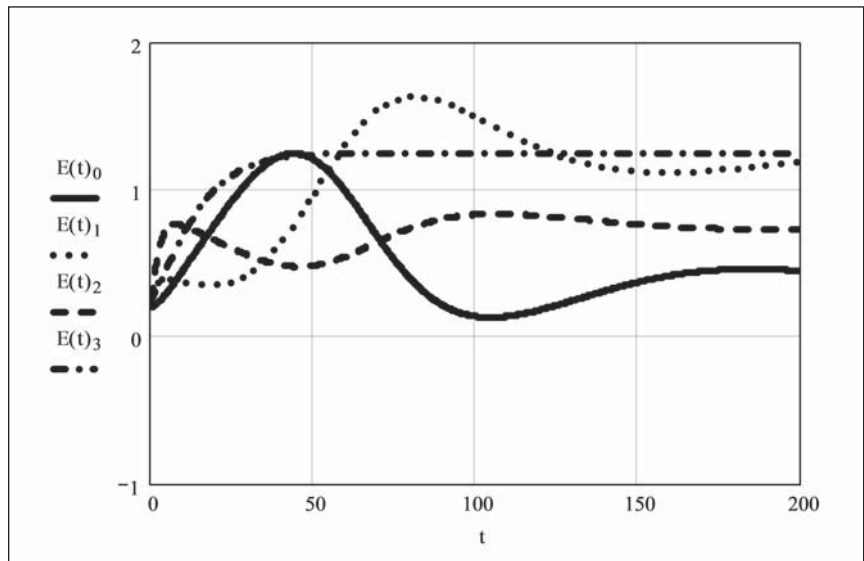


Рис.1. Пример динамики структурированной емкости рынка

сферах социально-экономического и технологического развития.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий возможности векторного тренда, программная модель для которого здесь построена.

Матрица скорости роста вектора емкости четырех сегментов рынка

$$MA := \begin{pmatrix} 0.02 & 0.1 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Матрица, задающая пределы роста емкости рынка

$$MB := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Вектор начальных емкостей сегментов рынка

$$y_{\text{start}} := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы MA

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0.019 + 0.042i \\ 0.019 - 0.042i \\ 0.483 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Динамика структурированной емкости рынка в ежемесячном представлении дана на графиках рис. 1.

5. Заключение

Таким образом, изучены векторные функции для исследования динамики структурированной емкости взаимосвязанных сегментов рынка, а также их свойства и возможности программной реализации векторных трендов в среде системы Mathcad.

Литература

1. Форрестер Д. Мировая динамика. – Москва Санкт-Петербург: Terra Fantastica, 2003. – с. 379.
2. Мартино Дж. Технологическое прогнозирование. – М.: Издательство «Прогресс», 1977. – с. 591.
3. Шабалин А.Н. Векторные функции для моделирования фондовых индексов. Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. №3, 2011.

References

1. Forester D. World dynamics. – Moscow St. Petersburg: Terra Fantastica, 2003. – p. 379.
2. Martino G. Technological forecasting. – M.: Progress, 1977. – p. 591.
3. Shabalin A.N. Vector functions for modeling of share indexes. Ekonomika, statistika i informatika. Vestnik UMO. №3, 2011.