ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КАПИТАЛИЗАЦИИ ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ ДАННЫМ

УДК 339.13.017

Михаил Борисович Ласкин,
к.ф.-м.н., доцент, директор ООО «Инвест-Строй»
Тел.: (812) 315-50-92
Эл. почта: laskinmb@yahoo.com

Олег Витальевич Русаков,
к.ф.-м.н., доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Санкт-Петербургского государственного университета
Тел.: (812) 428-42-12,
Эл. почта: OViRusakov@yahoo.co.uk

Ольга Ильинична Джаксумбаева,
к.э.н., ассистент кафедры информационных систем в экономике Санкт-Петербургского государственного университета
Тел.: (812) 273-02-76
Эл. почта: olgadzh@rambler.ru

Авторами статьи предложен метод определения коэффициента капитализации, оценки стоимости недвижимости, оценки рентных ставок на основании стохастической модели ценообразования. Соответствие эмпирических распределений цен двумерному логнормальному закону распределения вероятностей подтверждается статистическими данными по рынку недвижимости Санкт-Петербурга. Для проверки статистических гипотез используется критерий согласия Колмогорова-Смирнова. В соответствии с российским стандартом ФСО № 2, рыночная стоимость рассматривается как числовая характеристика (мода) случайной величины. Коэффициент капитализации рассматривается как случайная величина, с условными логарифмически нормальными законами распределения.

Ключевые слова: *рыночная стоимость недвижимости, стохастическая модель ценообразования, коэффициент капитализации, мода логарифмически нормального закона распределения, критерий согласия Колмогорова-Смирнова.*

M. Laskin, O. Rusakov, O. Dzhaksumbaeva

DETERMINATION OF COEFFICIENT OF CAPITALIZATION FROM STATISTICAL DATA

The article introduces a new stochastic model of the real estate market pricing, cost of rent, capitalization ratio appraisals based on a lognormal distribution. Statistical processing of Saint-Petersburg real estate market data results that the empirical distributions of the prices significantly fit to the two dimensional lognormal law of distribution. For establishing statistical hypotheses accordance we use Kolmogorov-Smirnov test of fit. Basing on the Russian Federal standard FSO N2, we look to the market value as a numerical characteristic (mode) of a random value. We understand capitalization ratio as a random variable with the conditional lognormal distribution.

Keywords: *real estate market value, stochastic model of pricing, capitalization ratio, mode of the logarithmically normal law of distribution, Kolmogorov-Smirnov test of fit.*

1. Введение

В теории и практике оценки при применении доходного подхода и метода прямой капитализации возникает вопрос о том, как определить коэффициент капитализации. С одной стороны, для его определения могут быть взяты аналогичные объекты недвижимости, для которых коэффициент капитализации каким-то образом уже определен. В данном случае фактически применяется сравнительный подход, а значит, используется некоторая статистика. Как правило, в практике оценки выборки не являются представительными, содержат малое количество объектов сравнения. При этом, как справедливо отмечалось в [1], проверка статистических гипотез часто не производится. Другим типичным подходом является метод экспертных оценок, который сводится к опросу практикующих оценщиков и усреднению полученных результатов. Между тем на рынке достаточно информации для того, чтобы на основании обширного статистического материала делать обоснованные и весьма точные оценки о значении как коэффициента капитализации, так и рыночной стоимости и рыночных ставках аренды. В настоящей статье предлагается метод, позволяющий на основе доступного статистического материала делать научно обоснованные оценки перечисленных параметров рынка недвижимости.

2. Рыночная стоимость и коэффициент капитализации

Как известно, коэффициент капитализации определяется соотношением

$$R = \frac{\text{EOI}}{V}, \tag{1}$$

где EOI – чистый операционный доход за период (как правило, за год),
V – стоимость объекта,
R – коэффициент капитализации (если выражен в %, то в данном случае в % годовых).

В настоящей статье мы рассматриваем приведенные величины (из расчета на 1 кв. м.). При расчетах сравнительным подходом, величины EOI и V определяются путем сравнения с некоторым множеством аналогичных характеристик объектов сравнения, следовательно, EOI и V являются случайными величинами. Случайная величина полностью описывается своей функцией распределения (или плотностью, если она существует). Как указано в Федеральном Стандарте Оценки № 2 [2] «При определении рыночной стоимости определяется наиболее вероятная цена, по которой объект оценки может быть отчужден на дату оценки на открытом рынке в условиях конкуренции, когда стороны сделки действуют разумно, располагая всей необходимой информацией, а на величине сделки не отражаются какие-либо чрезвычайные обстоятельства». Аналогичные формулировки, в основе которых фигурирует «наиболее вероятная цена», содержат и зарубежные стандарты оценки, такие как: IVS (р. 30 а) [3], TEGOVA (EVS p. 5.3.1) [4], USPAP (Standardrule 6-2, p.c.) [5], RICS (p. 3.2.1) [6]. Таким образом, рыночная стоимость (в одномерном случае) стандартами определена как мода закона распределения (наиболее вероятная цена – точка максимума плотности распределения цен). При определении коэффициента капитализации следует учитывать, что частное двух случайных величин само является случайной величиной, т.е.

имеет свою функцию распределения и числовые характеристики, которые определяются законом распределения, а не формулой (1). Кроме того, следует учитывать, что величины EOI и V могут быть (и являются!) зависимыми случайными величинами (распределение каждой их них зависит от того, какое значение приняла вторая). Существуют теоретические основания, подтвержденные практическими наблюдениями, считать, что распределения цен, образованные последовательными сравнениями имеют в качестве предела (по распределению) логарифмически нормальный закон. Это предположение непосредственно вытекает из фундаментальной работы [7]. В [8] приводятся данные исследований по Большому Токио, в которых наблюдается (при отсутствии сильных внешних возмущений) логарифмически нормальный закон распределения цен. Работа [9], посвященная исследованию динамики цен на недвижимость во времени, одним из следствий имеет следование цен закону логарифмически нормального распределения. В [10] доказано, что при достаточно простых и естественных предположениях процесс последовательных сравнений цен сходится по распределению к логарифмически нормальному распределению. Результат работы [10] очевидным образом распространяется и на арендные ставки, а следовательно и на случайную величину EOI, которую в рамках данной работы мы тоже полагаем распределенной логарифмически нормально.

Теперь отметим тот факт, что логарифмирование равенства (1) дает очевидное равенство

$$\ln R = \ln(\mathrm{EOI}) - \ln V, \tag{2}$$

что дает возможность переходить от рассмотрения логнормальных законов к нормальным законам (в том числе условным). Отметим также, что если $\ln V$, $\ln(\mathrm{EOI})$ распределены нормально с параметрами μ_1, σ_1, μ_2, σ_2, соответственно, то $\ln R$ распределено нормально с параметрами $\mu_2 - \mu_1$, $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$, где ρ – коэффициент корреляции. Наивероятными значениями (модами логнормальных законов) величин V, EOI, R являются

$$\begin{gathered}\mathrm{Mode}V = \exp(\mu_1 - \sigma_1^2),\\ \mathrm{Mode}(\mathrm{EOI}) = \exp(\mu_2 - \sigma_2^2),\\ \mathrm{Mode}R = \exp(\mu_2 - \mu_1 - \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2).\end{gathered} \tag{3}$$

В практике оценки при определении коэффициента капитализации часто говорят о «наиболее типичном» коэффициенте капитализации (разумеется, для изучаемого сектора рынка). В рамках данной статьи и следуя логике определения рыночной стоимости в ФСО №2 [2] мы будем вместо «наиболее типичного» (этот термин нуждается в определении) говорить о наиболее вероятном значении коэффициента капитализации. И здесь нас ожидает сюрприз: наиболее вероятное значение коэффициента капитализации (см.формулы (3)) не соответствует результату деления Mode(EOI) / Mode(V). Таким образом, коэффициент капитализации, определенный как результат деления рыночной арендной ставки на рыночную стоимость не является наиболее вероятным («наиболее типичным»). Это происходит из-за сдвига математического ожидания логарифмически нормального закона ($\mu_2 - \mu_1$), изменения дисперсии ($\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$) и логарифмического сжатия координатной оси.

Полагая случайные величины V и EOI зависимыми, имеющими совместное логарифмически нормальное распределение, найдем рыночную стоимость (Mode$V$|EOI = eoi) и наивероятный коэффициент капитализации при условии, что арендная ставка известна (EOI = eoi).

Утверждение 1. Если случайные величины V, EOI имеют совместное логарифмически нормальное распределение с параметрами $E(\ln V) = \mu_1$, $E(\ln(\mathrm{EOI})) = \mu_2$, $D(\ln V) = \sigma_1^2$, $D(\ln(\mathrm{EOI})) = \sigma_2^2$, ρ (коэффициент корреляции), то при фиксированном EOI = eoi, рыночная стоимость равна:

$$\mathrm{Mode}V = \exp\left\{\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\ln(\mathrm{eoi}) - \mu_2\right) - \sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right\} \tag{4}$$

наивероятный коэффициент капитализации равен

$$Mode\left(R\middle|\mathrm{EOI} = \mathrm{eoi}\right) =$$

$$= \exp\left\{\left(1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\ln(\mathrm{eoi}) - \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2 - \sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right\} \tag{5}$$

Доказательство

Рассмотрим двумерное логнормальное распределение величин V, EOI и двумерное нормальное распределение величин $\ln V$, $\ln(\mathrm{EOI})$.

Известно, что плотность двумерного нормального распределения с нулевым вектором средних задается при $x, y \in R$ следующей формулой

$$f_{X,Y}(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]\right\},$$

где σ_x^2, σ_y^2 – дисперсии случайных величин X и Y, соответственно, ρ – коэффициент корреляции X и Y.

Общая формула для условной плотности вектора, имеющего совместную плотность $p(x, y)$

$$p_{X|Y=y}(x) = p(x|y) = \frac{p(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx} = \frac{p(x,y)}{p(y)}$$

Тогда выражение для формулы условной плотности двумерного нормального вектора

$$f(X|y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{x}{\sigma_x} - \rho\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right\} \tag{6}$$

Таким образом, при каждом y случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $E\{X|Y=y\} = \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$ $D\{X|Y=y\} = \sigma_x^2(1-\rho^2)$.

Полагая $X = \ln V - \mu_1$, $Y = \ln(\mathrm{EOI}) - \mu_1$, $\sigma_1^2 = \sigma_x^2$, $\sigma_2^2 = \sigma_y^2$ и подставляя в соотношение (6) получаем формулу условной плотности величины $\ln V$ при условии ln(eoi)

$$f\left(\ln V \middle| \ln(\text{eoi})\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\ln V-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\frac{\ln(\text{eoi})-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

Таким образом, $\ln V$ (при условии ln(eoi)) нормально распределен с параметрами

$$E\left\{\ln V \middle| \ln(\text{EOI}) = \ln(\text{eoi})\right\} = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\ln(\text{eoi}) - \mu_2\right)$$

$$D\left\{\ln V \middle| \ln(\text{EOI}) = \ln(\text{eoi})\right\} = \sigma_1^2\left(1-\rho^2\right),$$

следовательно V распределено логарифмически нормально с теми же параметрами и мода V (наиболее вероятное значение – рыночная стоимость при заданном значении чистого годового дохода) равно

$$\text{Mode}\left(V \middle| \text{EOI} = \text{eoi}\right) =$$

$$= \exp\left\{\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\ln(\text{eoi}) - \mu_2\right) - \sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right\}$$

Из соотношения (2) следует, что при фиксированном EOI = eoi условные распределения коэффициента капитализации R логарифмически нормальны и наиболее вероятное значение коэффициента капитализации R равно:

$$\text{Mode}\left(R \middle| \text{EOI} = \text{eoi}\right) =$$

$$= \exp\left\{\ln(\text{eoi}) - \mu_1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\ln(\text{eoi}) - \mu_2\right) - \sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right\}$$

Утверждение 1 доказано.

Замечание 1. Как и для безусловного случая, наиболее вероятное значение коэффициента капитализации не соответствует результату деления eoi/Mode(V). Здесь также коэффициент капитализации, определенный как частное от деления известной арендной ставки на рыночную стоимость не является наиболее вероятным («наиболее типичным»). Однако, если удается построить совместное двумерное распределение, значение коэффициента капитализации как мультипликатора переводящего ставку ренты в рыночную стоимость утрачивается. Рыночная стоимость определяется по формуле (4). За коэффициентом капитализации остается только справочная функция, как характеристики состояния рынка. При этом может использоваться два значения. Прямой коэффициент капитализации будем обозначать R = eoi/Mode(V), наиболее вероятный (но не соответствующий рыночной стоимости V при фиксированном EOI = eoi) R^* = Mode(R|EOI = eoi) (см.формулу (5)).

Для недвижимости способной приносить доход важное значение имеет изучение двумерного совместного распределения величин V, EOI. Его построение приводит к необходимости вместо одномерных рыночных стоимости и рентной ставки рассматривать наиболее вероятную пару V и EOI. Наиболее вероятной парой является точка максимума плотности совместного распределения.

Утверждение 2. Абсолютный максимум плотности совместного (двумерного) логарифмически нормального распределения величин V, EOI с параметрами $E(\ln V) = \mu_1$, $E(\ln(\text{EOI})) = \mu_2$, $D(\ln V) = \sigma_1^2$, $D(\ln(\text{EOI})) = \sigma_2^2$, ρ (коэффициент корреляции), находится в точке с координатами:

$$V = \exp\{\mu_1 - \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\},\ \text{EOI} = \exp\{\mu_2 - \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\} \quad (7)$$

Доказательство

Плотность двумерного логарифмически нормального распределения величин X и Y с нулевым вектором средних задается формулой

$$f_{X,Y}(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\frac{1}{xy}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{\ln(x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{\ln(x)\ln(y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{\ln(y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\},$$

(где $1/xy$ значение Якобиана преобразования системы координат при переходе от координат x, y к координатам ln(x), ln(y)).

Тогда плотность двумерного логарифмически нормального распределения величин V и EOI с параметрами μ_1, σ_1^2 и μ_2, σ_2^2, ρ соответственно, задается формулой

$$f(v,\text{eoi}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\frac{1}{v\text{eoi}}e^{\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{\ln((v)-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{\ln((v)-\mu_1)\ln((\text{eoi})-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\ln((\text{eoi})-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}.$$

Максимум значения этой функции достигается в точке, в которой все производные по направлениям равны нулю. Вычисляя частные производные и приравнивая их к нулю, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} -\dfrac{\ln((v)-\mu_1)}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} + \dfrac{\rho\ln((\text{eoi})-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} = 1 \\ \dfrac{\rho\ln((v)-\mu_1)}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} - \dfrac{\ln((\text{eoi})-\mu_2)}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} = 1 \end{cases}$$

ее решение:

$$\ln((v) - \mu_1) = -\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\ \ \ln((\text{eoi}) - \mu_2) = -\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2.$$

Искомая точка абсолютного максимума имеет координаты:

$$V = \exp\{\mu_1 - \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\},\ \text{EOI} = \exp\{\mu_2 - \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\}.$$

Утверждение 2 доказано.

Замечание 1. Коэффициент капитализации в точке абсолютного максимума равен $R = \dfrac{\exp\{\mu_2 - \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\}}{\exp\{\mu_1 - \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\}} =$ $= \exp\{\mu_2 - \mu_1 - \sigma_2^2 + \sigma_1^2\}$. Значение R в данном случае совпадает с частным от деления наивероятных безусловных значений V и EOI, но не совпадает с безусловным наивероятным значением (см. формулы (3)). В точке абсолютного максимума $R = R^*$.Действительно, при

$$\mathrm{eoi} = \exp\{\mu_2 - \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\}$$

$$\mathrm{Mode}V = \exp\left\{\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(-\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right) - \sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right\} =$$

$$= \exp\{\mu_1 - \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\}$$

$$\text{и } R^* = \frac{\exp\{\mu_2 - \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\}}{\mathrm{Mode}V} = R.$$

Замечание 2. Построение двумерного совместного распределения величин V и EOI полностью описывает состояние сектора рынка, статистика по которому используется для расчетов. Может быть определена наиболее вероятная пара V и EOI и соответствующий ей коэффициент капитализации. По заданному значению EOI = eoi (или $V = v$) может быть определена рыночная стоимость (или рыночная ставка аренды). Геометрически плотности условных распределений являются сечениями двумерной плотности при EOI = eoi (или $V = v$). Коэффициент капитализации (прямой или наиболее вероятный) сохраняет справочное значение как одна из характеристик состояния рынка.

Замечание 3. Наивероятная пара сразу дает как рыночную стоимость, определенную сравнительным подходом так и рыночную стоимость, определенную доходным подходом методом прямой капитализации. Место обычного согласования результатов занимает расчет точки абсолютного максимума двумерной плотности.

Критерий совместной нормальности для наблюдаемых парных выборок.

Так как мы предполагаем совместное логарифмически нормальное распределение величин V и EOI (совместное нормальное распределение их логарифмов), нам понадобится критерий совместной нормальности для наблюдаемых парных выборок.

Рассмотрим матрицу поворота системы координат на положительный угол φ, где $\varphi \in [0, +\pi)$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Пусть $(X, Y)^T$ – случайный вектор со значениями в R^2 с нулевым математическим ожиданием компонент.

Утверждение 3. (Критерий совместной нормальности).

Каждая компонента вектора $(X_\varphi, Y_\varphi)^T = A_\varphi(X, Y)^T$ имеет нормальное распределение для любого $\varphi \in [0, +\pi)$ тогда и только тогда, когда вектор $(X, Y)^T$ имеет совокупно нормальное распределение.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся известным критерием совокупной нормальности: случайный вектор совокупно нормален тогда и только тогда, когда любая его линейная комбинация имеет одномерное нормальное распределение.

Так как поворот – линейное преобразование, а линейная комбинация линейных преобразований также линейное преобразование, то любая линейная комбинация компонент вектора $(X_\varphi, Y_\varphi)^T$ есть линейная комбинация вектора $(X, Y)^T$.

Теперь допустим, что для любого $\varphi \in [0, +\pi)$ каждая из компонент вектора $(X_\varphi, Y_\varphi)^T$ имеет одномерное нормальное распределение (с нулевым средним). В частности, $Y_\varphi = X\sin\varphi + Y\cos\varphi$. Очевидно, вырожденные случаи $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 0$ дают одномерную нормальность каждой из компонент X и Y. Рассмотрим невырожденный случай $\sin\varphi \neq 0$, $\cos\varphi \neq 0$. Запишем $\dfrac{1}{\cos\varphi}Y_\varphi = X\tan\varphi + Y$, откуда следует, что любая линейная комбинация X и Y с невырожденными коэффициентами является нормально распределенной случайной величиной. Аналогично для X_φ. Утверждение 3 доказано.

Рассмотрим пример.

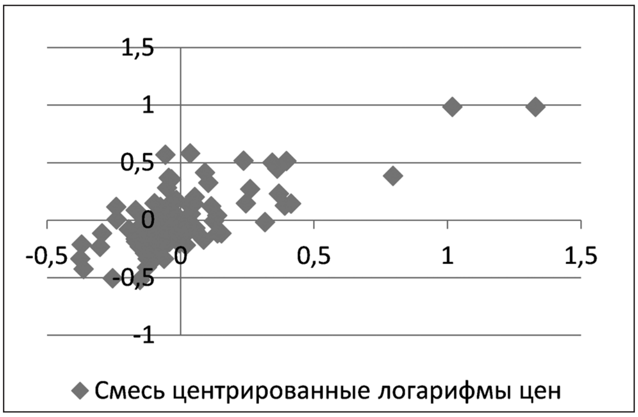
Для построения примера была использована статистика цен предложений по продажам и аренде вторичной жилой недвижимости, опубликованная в [11], дата выпуска 31.03.2014 г. Общий объем выборки составил 13555 по продаже и 1113 по аренде. Основной проблемой в данном случае и в практике оценки является отсутствие парных наблюдений (цифры по продаже и аренде по одному и тому же объекту). Для группировки данных мы использовали следующий прием, основанный на информации, опубликованной в [12].

1. В [12] при подготовке отчета о кадастровой стоимости объектов недвижимости в г.Санкт-Петербург весь город условно разбит на 285 экономических зон. Принцип разбиения – по социально-экономической однородности. Следуя логике отчета [12], мы предположили, что в пределах одной экономической зоны цены не слишком отличаются друг от друга, и могут пониматься как цены на однородные объекты (т.е. подчиняются логарифмически нормальному закону распределения с малой дисперсией).

2. Цены продаж и цены аренды были прологарифмированы и усреднены в каждой экономической зоне. Получившаяся пара чисел lnV и ln(EOI) считается одним парным наблюдением. Всего получилось 103 пары. Параметры получившегося закона распределения

$$\mu_1 = 4{,}6182,\ \mu_2 = 1{,}903,\ \sigma_1 = 0{,}2443,\ \sigma_2 = 0{,}2673,\ \rho = 0{,}7224. \qquad (8)$$

3. Затем все наблюдения были центрированы. На рис. 1 показаны скопление наблюденных точек на плос-



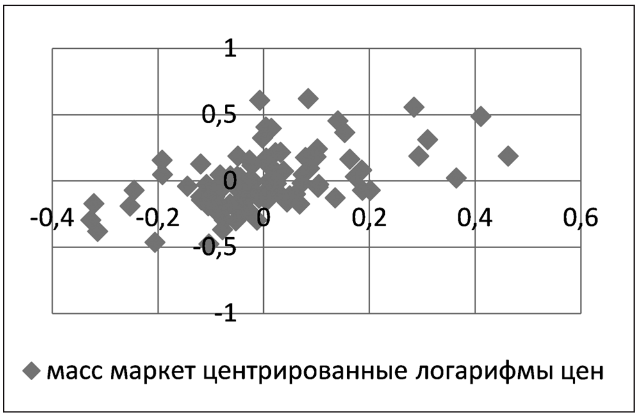


Рис. 1. Скопление наблюденных центрированных пар логарифмов цен продаж и логарифмов цен аренды (слева весь город, справа – масс-маркет).

кости ln*V*, ln(EOI). Центр координат помещен в точку $\mu_1 = 4{,}6182$, $\mu_2 = 1{,}903$.

4. Из 103 парных наблюдений 7 выделены в отдельную группу премиум сегмента (элитный сектор). Оставшиеся 96 парных наблюдений представляют масс-маркет.

5. Полагая (исходя из вида скопления точек) совместную нормальность распределения ln*V*, ln(EOI) мы проверили их на совместную нормальность приведенным выше критерием. Для этого применялся тест Колмогорова-Смирнова для исходных выборок $\ln V - \mu_1$, $\ln(EOI) - \mu_2$ и выборок полученных из исходных путем поворота против часовой стрелки на угол φ от 0 до π с шагом в 1 градус. При заданном значении *p*-value (> 0,05) оснований отвергнуть гипотезу о совместном логарифмически нормальном распределении нет. Ниже (рис. 2 и 3) показаны графики зависимости значения *p*-value от угла поворота для всего цикла испытаний для выборки масс-маркета. Не наблюдалось ни одного значения ниже 0,05 (минимальное 0,06). Принимается гипотеза о логарифмически нормальном распределении величин *V* и EOI.

Для премиум сектора в силу малости выборки (7 точек) КС-тест дает высокие значения *p*-value. Результаты исследований с более объемными выборками по премиум сектору (элита), мы опубликовали в [13], поэтому опираясь на доказательство сходимости цен на однородные активы к логарифмически нормальному распределению[10], мы полагаем распределение *V* и EOI для премиум-сегмента также совместно логарифмически нормальным.

На рис. 4 представлены плотность двумерного логарифмически нормального распределения величин *V* и EOI. На левой диаграмме показана проекция поверхности на плоскость *V*, EOI. Хорошо видны линии рассеяния, отвечающие фиксированному значению вероятности. На правой диаграмме трехмерное изображение плотности. Хорошо видны линии одномерных условных логарифмически нормальных распределений *V* (при фиксированном EOI) и линии условных логарифмически нормальных распределений EOI (при фиксированном *V*).

Подставляя параметры закона распределения (8) в (7) получаем координаты точки абсолютного максимума:

$$V = 91{,}155 \text{ (т.р./1 кв.м.)}, \ EOI = 6{,}074 \text{ (т.р./1 кв.м.в год)}$$
и $$R = \exp(\mu_2 - \mu_1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2) = 6{,}66\%$$

(в целом по рынку вторичной жилой недвижимости Санкт-Петербурга на дату 31.04.2014 г.). R при этом не является наиболее вероятным, но соответствует наивероятной паре EOI,V и даже отношению одномерных наивероятных значений EOI,V .

Указанные параметры относятся к смеси различных объектов недвижимости, включая типы домов, разные районы, социально-экономические зоны и т.д. Исходная выборка, безусловно, может (а для более подробных исследований – должна) быть разбита на более однородные

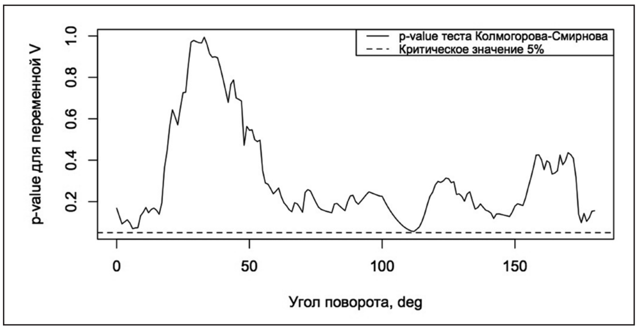


Рис. 2. График зависимости значения *p*-value для переменной *V* от угла поворота φ

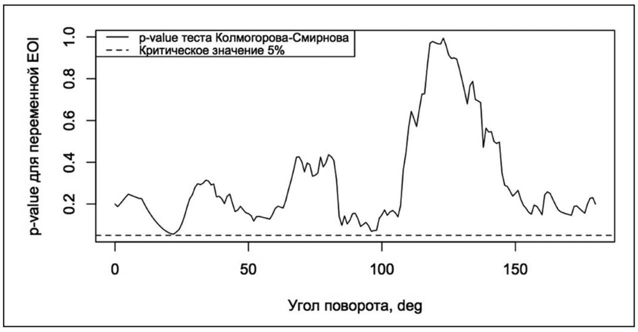
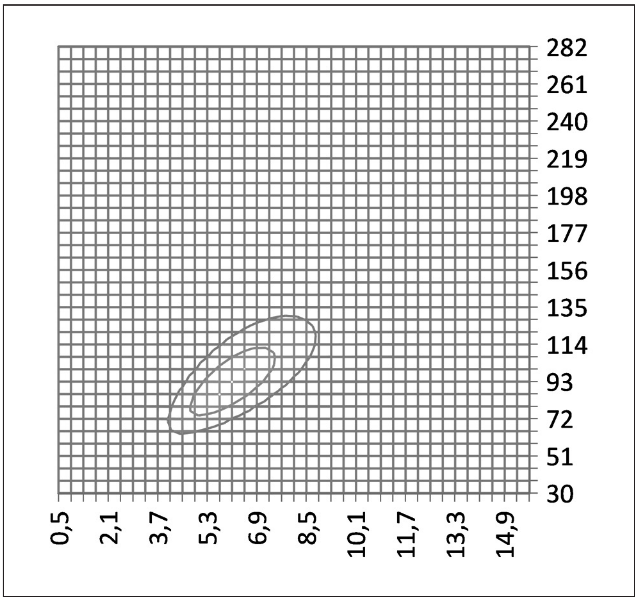


Рис. 3. График зависимости значения *p*-value для переменной EOI от угла поворота φ.



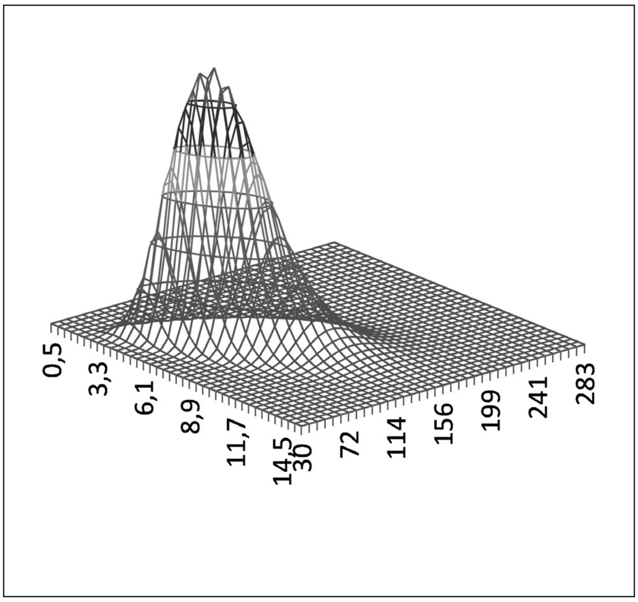


Рис. 4. Плотность двумерного логарифмически нормального распределения цен предложений *V* и ставок арендной платы EOI для сектора вторичной жилой недвижимости по г. Санкт-Петербург по данным на 31.03.2014 г.

объекты, с целью получения информации, достаточной для аналитических или оценочных целей. Здесь мы покажем только один шаг последующего разбиения – на премиум сегмент и масс-маркет.

На рис. 5 представлены плотность двумерного логарифмически нормального распределения величин *V* и EOI для масс-маркета. Поскольку выборка по масс-маркету получена путем исключения из исходной выборки точек, относящихся к премиум-сегменту, параметры закона распределения изменились:

$$\mu_1 = 4{,}5698,\ \mu_2 = 1{,}864,\ \sigma_1 = 0{,}1399,\ \sigma_2 = 0{,}2165,\quad \rho = 0{,}518. \qquad (9)$$

Соответственно изменилась и поверхность.

Подставляя параметры закона распределения (9) в (7) получаем координаты точки абсолютного максимума:

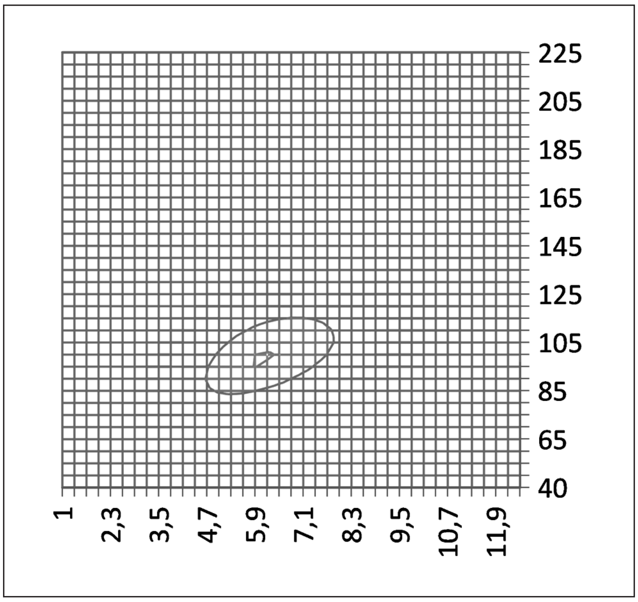
$$V = 93{,}220 \text{ (т.р./1 кв.м.)},\ \mathrm{EOI} = 6{,}121 \text{ (т.р./1 кв.м.в год)}$$

и $$R = \exp(\mu_2 - \mu_1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2) = 6{,}57\%$$

На рис. 6 представлены плотность двумерного логарифмически нормального распределения величин *V* и EOI для премиум-сегмента. Параметры закона распределения:

$$\mu_1 = 5{,}2352,\ \mu_2 = 2{,}37,\ \sigma_1 = 0{,}3857,\ \sigma_2 = 0{,}3668,\quad \rho = 0{,}8407. \qquad (10)$$

Проекция поверхности приобрела более вытянутую форму (коэффициент корреляции ближе к 1, чем в предыдущих случаях).



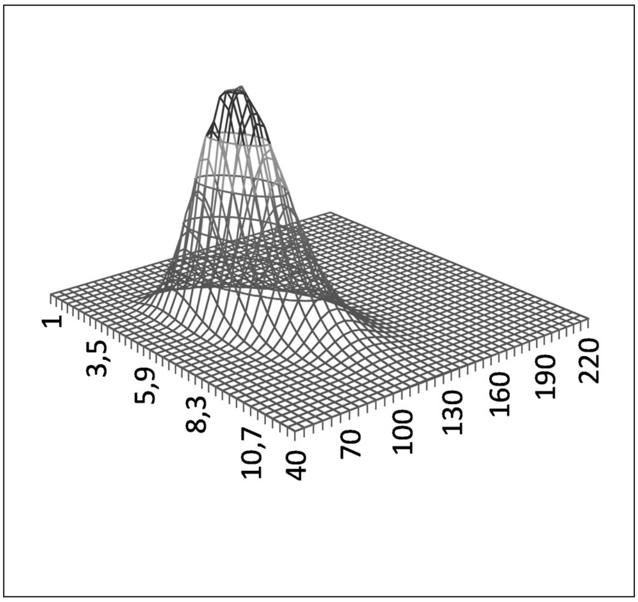
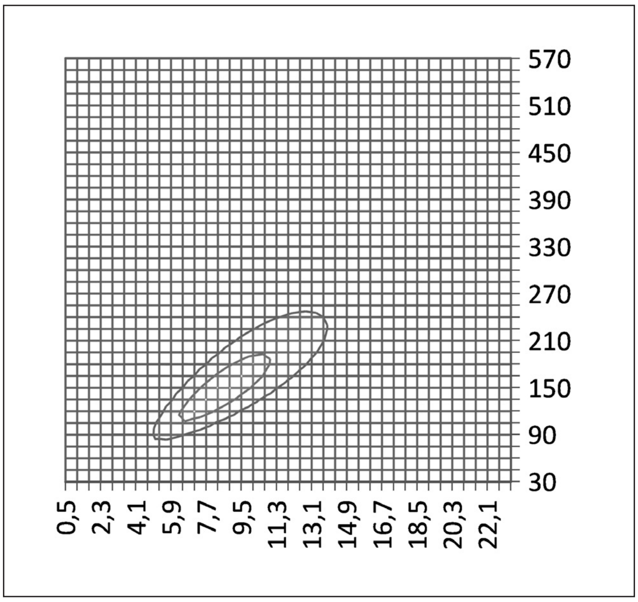


Рис. 5. Плотность двумерного логарифмически нормального распределения цен предложений V и ставок арендной платы EOI для сектора вторичной жилой недвижимости (масс-маркет) по г. Санкт-Петербург по данным на 31.03.2014 г.



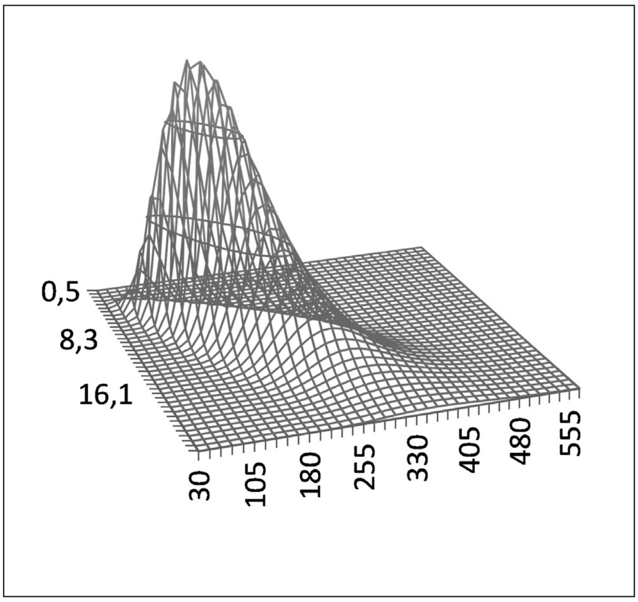


Рис. 6. Плотность двумерного логарифмически нормального распределения цен предложений V и ставок арендной платы EOI для сектора вторичной жилой недвижимости (премиум сектор) по г. Санкт-Петербург по данным на 31.03.2014 г.

Подставляя параметры закона распределения (10) в (7) получаем координаты точки абсолютного максимума:

V = 143,945 (т.р./1 кв.м.), EOI = 8,557 (т.р./1 кв.м.в год)

и $R = \exp(\mu_2 - \mu_1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2) = 5{,}94\%$.

Следует отметить тот факт, что капитализация в премиум-сегменте ниже (!), чем в масс-маркете, несмотря на более высокую оценку ставки аренды.

В случае если для объекта (оценки) известна ставка арендной платы EOI = eoi (например использование объекта соответствует наилучшему экономическому исполь-

Таблица 1

Ставки арендной платы (тыс.руб. за 1 кв.м. в год) и соответствующие им рыночная стоимость (тыс.руб. за 1 кв.м.) и коэффициент капитализации для премиум сегмента

EOI = eoi	Mode$V$	R	R^*
3,000	58,426	5,13%	4,71%
4,500	83,607	5,38%	4,93%
6,000	107,813	5,57%	5,10%
7,500	131,318	5,71%	5,23%
9,000	154,280	5,83%	5,35%
10,500	176,800	5,94%	5,44%
12,000	198,948	6,03%	5,53%
13,500	220,775	6,11%	5,60%
15,000	242,322	6,19%	5,67%
16,500	263,620	6,26%	5,74%
18,000	284,694	6,32%	5,79%
19,500	305,564	6,38%	5,85%
21,000	326,249	6,44%	5,90%
22,500	346,763	6,49%	5,95%
24,000	367,118	6,54%	5,99%
25,500	387,326	6,58%	6,03%
27,000	407,397	6,63%	6,07%
28,500	427,338	6,67%	6,11%
30,000	447,158	6,71%	6,15%
31,500	466,862	6,75%	6,18%
33,000	486,459	6,78%	6,22%
34,500	505,952	6,82%	6,25%

Таблица 2

Ставки арендной платы (тыс.руб. за 1 кв.м. в год) и соответствующие им рыночная стоимость (тыс.руб.за 1 кв.м.) и коэффициент капитализации для масс-маркета

EOI = eoi	Mode$V$	R	R^*
2,500	69,294	3,61%	3,51%
3,000	73,654	4,07%	3,96%
3,500	77,553	4,51%	4,39%
4,000	81,097	4,93%	4,79%
4,500	84,358	5,33%	5,18%
5,000	87,385	5,72%	5,56%
5,500	90,217	6,10%	5,92%
6,000	92,883	6,46%	6,28%
6,500	95,405	6,81%	6,62%
7,000	97,800	7,16%	6,96%
7,500	100,085	7,49%	7,28%
8,000	102,270	7,82%	7,60%
8,500	104,366	8,14%	7,91%
9,000	106,381	8,46%	8,22%
9,500	108,324	8,77%	8,52%
10,000	110,199	9,07%	8,82%
10,500	112,013	9,37%	9,11%
11,000	113,771	9,67%	9,40%
11,500	115,476	9,96%	9,68%
12,000	117,132	10,24%	9,96%

зованию и ставка фиксирована) рыночная стоимость определяется по формуле (4). Наивероятный коэффициент капитализации в этом случае определяется по формуле (5). Обозначим отношение $R = \dfrac{\mathrm{eoi}}{\mathrm{Mode}\left(V\middle|\mathrm{EOI} - \mathrm{eoi}\right)}$ (прямая капитализация) и R^* – наивероятный коэффициент капитализации, полученный по формуле (5). Поскольку величина R(R^*) имеет только справочное значение, вопрос выбора R или R^* зависит от того, для чего это нужно. Для привычного применения (в данном случае явно избыточного) – перевода ставки аренды в стоимость – следует применить R. Для справочной характеристики как наиболее вероятного значения – следует взять R^*.

В представленных ниже таблицах (для случая условных распределений) представлены: при заданном значении EOI = eoi наиболее вероятная цена ModeV (рыночная стоимость 1 кв.м.), коэффициент прямой капитализации R, и наивероятный коэффициент капитализации R^* при заданном значении EOI = eoi. Как R так и R^* имеют только справочное значение. Величина R относится только к той паре значений для которой рассчитана. Величина R^* является наивероятной при условии фиксированного EOI = eoi и еще не установленного значения V (случайная величина с условным законом распределения). Для определения рыночной стоимости или рыночной ставки аренды в данном случае это значения не имеет, т.к. рыночная стоимость (ставка аренды) определяется по плотности условного распределения.

Результаты для премиум сегмента представлены в табл. 1, а для масс-маркета в табл. 2.

Если вернуться к рассмотрению совместного двумерного распределения случайных величин V и EOI, то следует отметить, что приведенные в табл. 1 и 2 пары EOI и V не равновероятны: по мере удаления от наиболее вероятных значений (рыночной стоимости и рыночной ставки аренды) эти пары становятся более редкими (маловероятными). Кроме этого, табл. 1 и 2 иллюстрируют тот факт, что R не является константой.

Заключение

1. Коэффициент капитализации является случайной величиной, определенной соотношением (1), где числитель и знаменатель случайные величины.

2. Если рентные ставки и цены недвижимости распределены по логарифмически нормальному закону, то и коэффициент капитализации, определяемый по условным законам распределения V или EOI, тоже распределен логарифмически нормально.

3. При построении двумерного закона совместного распределения величин V и EOI за коэффициентом капитализации остается лишь справочное значение как одной из важных характеристик рынка. При этом могут рассматриваться два значения. Прямой коэффициент капитализации (как отношение соответствующих величин) и наивероятный коэффициент капитализации (мода соответствующего условного закона распределения).

4. При построении двумерного закона совместного распределения величин V и EOI могут быть получены оценки рыночной стоимости (рыночной ставки арендной платы), соответствующие оценкам, которые могли быть получены сравнительным и доходным подходом. Согласование результатов не требуется, т.к. они получаются одинаковыми.

5. Двумерный закон распределения величин V и EOI, поверхность плотности распределения, параметры закона μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, ρ полностью описывают состояние изучаемого сектора рынка на дату публикации статистического материала.

Литература

1. Грибовский С.В. Математические методы оценки стоимости недвижимого имущества. Учебное пособие/ С.В. Грибовский С.А. Сивец – М.: Финансы и Статистика, 2008 – 368 с.

2. Федеральный стандарт оценки №2 «Цель оценки и виды стоимости (ФСО №2)» (утвержден Приказом Минэкономразвития России № 255 от 20.07.2007. Зарегистрирован в Минюсте России 23.08.2007).

3. European Valuation Standards 2012 / The European Group of Valuers' Associations, Brussels, 2012 – 240 p. – Режим доступа: http://www.tegova.org/en/p4fe1fcee0b1db, свободный – Загл. с экрана (Дата обращения: 02.08.2015).

4. International Valuation Standards 2013. Framework and Requirements / International Valuation Standard Council, London, 2013 – 47 p. – Режим доступа: http://www.ivsc.org/sites/default/files/IVS%202013%20without%20guidance.pdf, свободный – Загл. сэкрана. (Дата обращения: 02.08.2015).

5. Royal Institution of Chartered Surveyors Valuation Professional Standard 2014 / RICS, 2014.

6. Uniform Standards of Professional Appraisal Practice, 2014-2015 edition / Appraisal Institute, 2014 – Режим доступа: http://www.uspap.org/, свободный – Загл. сэкрана (Дата обращения: 02.08.2015).

7. Black, F. The pricing of options and corporative liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy – 1973 – Vol. 81 №3 – p. 637–654.

8. T.Ohnishi, T.Mizuno, C.Shimizu, T.Watanabe "On the Evolution of the House Price Distribution." Columbia Business School. Center of Japanese Economy and Business, Working Paper Series, No 296, May 2011.
http:/academicommons.columbia.edu/item/ac:135362

9. P.Ciurlia, A.Gheno "A model for pricing real estate derivatives with stochastic interest rates", Mathematical and Computer Modelling, 50, 233-247, 2009.

10. Русаков, О.В. Стохастическая модель ценообразования на рынке недвижимости: формирование логнормальной генеральной совокупности / О.В. Русаков, М.Б. Ласкин, О.И. Джаксумбаева // Вестник УМО – 2015 – №5 – в печати.

11. Бюллетень Недвижимости №13/1605 Санкт-Петербург, 24.03.2014.

12. Отчет об определении кадастровой стоимости объектов недвижимости (за исключением земельных участков), расположенных на территории Санкт-Петербурга. КУГИ Правительства Санкт-Петербурга, том 2, раздел 2.3, СПб, 2012 http://rosreestr.ru/wps/portal/p/

cc_ib_portal_services/cc_ib_ais_fdg/co/ Субъект РФ: С-Петербург. Виды объектов: Недвижимость, помещения. Отчет №32-1-0733/2012(2), Санкт-Петербург, 30.11.2012.

13. ЛаскинМ.Б., Русаков О.В., ДжаксумбаеваО.И., Ивакина А.А. Особенности рыночной стоимости на рынке недвижимости при логарифмически нормальном распределении. «Имущественные отношения в Российской Федерации», 2016 г., в печати.

References

1. Gribovsky, S. V. “Mathematical methods of survey (estimation) of real estate value” Textbook. M.: Finance and Statistics, (in Russian), 2008.

2. Federal Standard of Survey (Valuation) № 2 “The purpose of valuation and types of prices”. Decree of the Ministry of Economic Development of the Russian Federation №255 dated at 20.07.2007. Registered in the Ministry of Justice of RF 23.08.2007.

3. International Valuation Standard Council, London, 2013.

URL:http://www.valuersinstitute.com.au/docs/professional_practice/International%20Valuation%20Standards%202013.pdf

4. European Valuation Standards, 7thedition, Brussels, 2012.

URL: http://www.tegova.org/en/p4fe1fcee0b1db

5. Uniform Standards of Professional Appraisal Practice, 2014-2015 edition, Annapolis, Maryland, USA, 2014.

URL:http://www.uspap.org/

6. Royal Institution of Chartered Surveyors Valuation Professional Standard,London,2014.

URL:http://www.rics.org/uk/shop/RICS-Valuation-Professional-Standards-Red-Book-2013-19750.aspx

7. Black, F. The pricing of options and corporative liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy – 1973 – Vol. 81 №3 – p. 637–654.

8. T.Ohnishi, T.Mizuno, C.Shimizu, T.Watanabe “On the Evolution of the House Price Distribution.” Columbia Business School. Center of Japanese Economy and Business, Working Paper Series, No 296, May 2011

http:/academicommons.columbia.edu/item/ac:135362

9. P.Ciurlia, A.Gheno “A model for pricing real estate derivatives with stochastic interest rates”, Mathematical and Computer Modelling, 50, 233-247, 2009.

10. Rusakov O. Stochastic pricing model for the real estate market: formation of log-normal general population/ O.Rusakov, M.Laskin, O.Dzaksumbaeva // Vestnik UMO – 2015 – №5 – printed.

11. Real Estate Bulletin № 13/1605 Saint-Petersburg, 24.03.2014.

12. Report on determination of the real estate cadastre value (excluding land costs), situated in Saint-Petersburg. CASP Government of Saint Petersburg, edition 2, section 2.3, Saint-Petersburg, 2012.

URL: http://rosreestr.ru/wps/portal/p/cc_ib_portal_services/cc_ib_ais_fdg/co/

Federal Subject of RF: Saint-Petersburg. Types of property: Real Estate, Buildings. Report №32-1-0733/2012(2), Saint-Petersburg, 30.11.2012

13. M. Laskin,O. Rusakov, O. Dzhaksumbaeva, A.Ivakina. Specialaspects of real estate market pricing in term of lognormal distribution. “Property relations in the Russian Federation”, 2016 printed.