

# ОБЩЕДОСТУПНЫЕ ИНТЕРАКТИВНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ. НОВАЯ CDF-ТЕХНОЛОГИЯ СОЗДАНИЯ

УДК 004.91; 378

**Евгений Михайлович Воробьев**,  
д.ф.-м.н., профессор, гл.н.с. каф. Высшей математики  
Московского государственного университета экономики,  
статистики и информатики (МЭСИ)  
Тел.: 8 (495) 442-23-91  
Эл. почта: emvorobyev@mesl.ru

**Валерий Александрович Никишкин**,  
к.ф.-м.н., зав. каф. Высшей математики Московского госу-  
дарственного университета экономики, статистики и инфор-  
матики (МЭСИ)  
Тел.: 8 (495) 442-23-91  
Эл. почта: VNikishkin@mesl.ru

В работе обсуждается информационная технология созда-  
ния электронных учебников нового формата по матема-  
тическим дисциплинам и приведен пример таких учебных  
пособий. Технология, называемая «формат вычисляемых  
документов» (CDF), предложена фирмой Wolfram Research –  
разработчиком интегрированной системы символьных, гра-  
фических и численных расчетов «Математика». С помощью  
рассматриваемой технологии создаются интерактивные  
учебные пособия по дисциплинам с существенным матема-  
тическим компонентом. Интерактивность пособий означает,  
что в нем наряду с текстом содержатся вычисляемые вари-  
анты математических выражений: функций, графиков и т.п.  
Выбор вариантов осуществляется пользователем в момент  
прочтения текста. Интерактивность способствует существен-  
ному повышению эффективности усвоения материала  
студентами. Пособия общедоступны в том смысле, что для  
их прочтения требуется лишь бесплатно распространяемое  
программное обеспечение.

**Ключевые слова:** информационная технология, интерак-  
тивные электронные учебные пособия, эффективность  
обучения, математические дисциплины, общедоступ-  
ность.

**Evgenii M. Vorobev**,  
PhD in Mathematics, Professor, Chief Researcher the Depart-  
ment of Higher Mathematics Moscow State University of Eco-  
nomics, Statistics and Informatics (MESI)  
Tel.: 8 (495) 442-23-91  
E-mail: EVorobyev@mesl.ru

**Valerii A. Nikishkin**,  
PhD Physical and Mathematical Sciences Head of Higher Math-  
ematics Chair Moscow State University of Economics, Statistics  
and Informatics (MESI)  
Tel.: 8 (495) 442-23-91  
E-mail: VNikishkin@mesl.ru

## PUBLIC INTERACTIVE ELECTRONIC TEXTBOOKS ON MATHEMATICAL DISCIPLINES. NEW CDF- TECHNOLOGY OF CREATION

We discuss a new information technology for designing interac-  
tive e-tutorials in mathematics. We also present an example of  
such a tutorial. The technology, called "Computable Document  
Format" (CDF), proposed by Wolfram Research, Inc. – the de-  
veloper of the well known mathematical program system "Math-  
ematica". The interactivity of the tutorials means that the latter  
contain the executable mathematical objects such as formulae,  
graphs of functions, etc. together with the definitions, theorems,  
proofs and so on. The user makes his choice of presupposed  
variants of mathematical objects for calculation at the moment  
of reading the tutorial.

**Keywords:** information technology, interactive electronic tutori-  
als in Mathematics, efficiency of teaching, accessibility.

## 1. Введение

Интегрированная система символьных, графических и  
численных расчетов «Математика» [1] использовалась  
преподавателями кафедры Высшая математика МЭСИ для  
чтения лекций по дисциплинам Математика и Дифферен-  
циальные уравнения в частных производных, начиная с  
2001/2002 учебного года. В дальнейшем в МЭСИ стала ис-  
пользоваться Интернет-версия рассматриваемой системы,  
которая называется ВебМатематика [1].

На кафедре ВМ были разработаны интерактивные элек-  
тронные учебные пособия, получившие высокую оценку со  
стороны студентов и преподавателей. С пособиями можно  
познакомиться на сайте <http://webmath.mesi.ru>. Методика  
их применения обсуждается в публикациях авторов [2–4].  
Широкому применению этих технологий препятствует вы-  
сокая для России цена лицензий, по которым они распро-  
страняются.

Сильной стороной электронных учебных пособий,  
разработанных на кафедре, является их интерактивность,  
позволяющая автоматизировать сложные и утомительные  
математические вычисления, создавать яркие и красочные  
визуальные иллюстрации математических концепций, эконо-  
мить время лектора или преподавателя, тем самым повы-  
шая эффективность обучения математическим дисципли-  
нам. Однако не следует забывать о необходимости и пользе  
создания интерактивных учебников и учебных пособий,  
которые могли бы находиться в личном пользовании сту-  
дентов.

С этой точки зрения нам представляется перспективным  
новый формат интерактивных электронных учебных посо-  
бий, который называется «вычисляемый документ» (CDF).  
Вычисляемый документ содержит текст и интерактивные  
вставки, содержащие динамические математические объ-  
екты: мультфильмы, вращаемые трехмерные графики, из-  
меняемые формулы и т.п. Динамика объектов управляется  
читателем. Он может изменять содержание мультфильма,  
выбрать функцию, вращаемый график которой он хочет  
изучить, выбирать значения параметров в формулах.

Читать учебные пособия в CDF-формате можно с помо-  
щью бесплатного плеера, который каждый желающий мо-  
жет свободно скачать с сайта <http://www.wolfram.com>.

Учебные пособия могут быть также размещены в Ин-  
тернете. На указанном сайте можно посмотреть многочис-  
ленные примеры CDF-документов.

## 2. CDF-учебник по математическому анализу

Дисциплина Математический анализ занимает важное  
место в учебных планах естественно научных, экономи-  
ческих, информационных, инженерных и других специаль-  
ностей. Это объясняется существенным и все возрастаю-  
щим значением математических моделей и методов их ис-

следования и громадным объемом оцифрованных массивов данных, собираемых с объектов управления современной экономики и требующих разработки эффективных методов их обработки. Отсюда следует, насколько важно решить задачу повышения эффективности обучения этой дисциплине.

Задача повышения эффективности может решаться как путем серьезной методической работы, направленной на усиление логической прозрачности и дидактической ясности дисциплины, так и путем применения современных информационных технологий. Эти два метода не только не исключают друг друга, но, напротив, второй открывает широкие возможности для успешной экспликации основных понятий математического анализа: предела, производной, интеграла и т.д. за счет визуализации математических объектов и автоматизации рутинных, но съедающих массу времени лектора и студентов вычислений.

В настоящей работе мы познакомим читателя с интерактивным электронным учебным пособием по математическому анализу, который разрабатывается на кафедре

Высшей математики МЭСИ с помощью новой информационной технологии, о которой шла речь выше. На рисунке 1 представлен фрагмент учебного пособия, посвященный разделу Непрерывность и точки разрыва функций.

Наряду с формулировками математических определений, фрагмент содержит интерактивный элемент и предназначен для визуализации понятия непрерывности функций вещественного аргумента – «непрерывности по Гейне». Генрих Эдуард Гейне (1821–1881) – немецкий математик, предложивший рассматриваемое определение. В подходе Гейне непрерывность функции в некоторой точке «а» определяется с помощью последовательностей значений функции на элементах последовательностей ее аргумента, сходящихся к точке «а».

Понятие предела одно из самых трудных для понимания во всей дисциплине Математический анализ. С трудностями и парадоксами его точного определения сталкивались еще античные философы и логики. Яркой иллюстрацией этого служат апории Зенона, в частности, знаменитая апория «Ахиллес и черепаха». Она состоит в следующем.

Быстрый Ахиллес взялся соревноваться в беге с черепахой и дал ей фору в несколько шагов. Утверждается, что Ахиллес, несмотря на то, что он может развить скорость в сто раз больше скорости черепахи, никогда не догонит ее, так как пока Ахиллес добежит до того места, где первоначально находилась черепаха, последняя отползет на некоторое расстояние. Это утверждение можно повторять бесконечно, т.е. процесс не имеет конца.

В математическом анализе средством разрешить это противоречие и, тем самым, закончить не имеющий конца процесс, является предел последовательности. Его строгое определение было дано в начале XIX века чешским математиком Больцано и французским математиком Коши.

Рисунок 1 имеет целью проиллюстрировать определение Гейне и пояснить понятие предела. Рисунок содержит фрагмент графика изучаемой функции, в данном случае функции  $f(x) = |x|/x$ , в окрестности точки  $a = 0$ . На оси абсцисс изображены точки последовательности  $\square$ , которая сходится к точке 0. В реальном CDF-документе эти точки имеют фиолетовый цвет. Вне оси абсцисс имеются красные точки графика функции, отвечающие элементам последовательности.

На рассматриваемом рисунке изображен на самом деле один из кадров мультфильма. От кадра к кадру читатель может переходить с помощью ползунка или с помощью кнопок с маркировкой + или -. При этом увеличивается или уменьшается число точек на рисунке. Их число изменяется в интервале от 1 до 100.

Читатель может также рассматривать кадры в режиме мультфильма. Этот режим особенно выразителен, так как позволяет интуитивно прочувствовать математическое понятие «сходимости» последовательностей. Режим мультфильма включается кнопкой, обозначаемой знаком >. Скоростью смены кадров можно управлять.

Вторым элементом управления динамическим объектом являются кнопки, которые позволяют выбрать изучаемую функцию из зара-

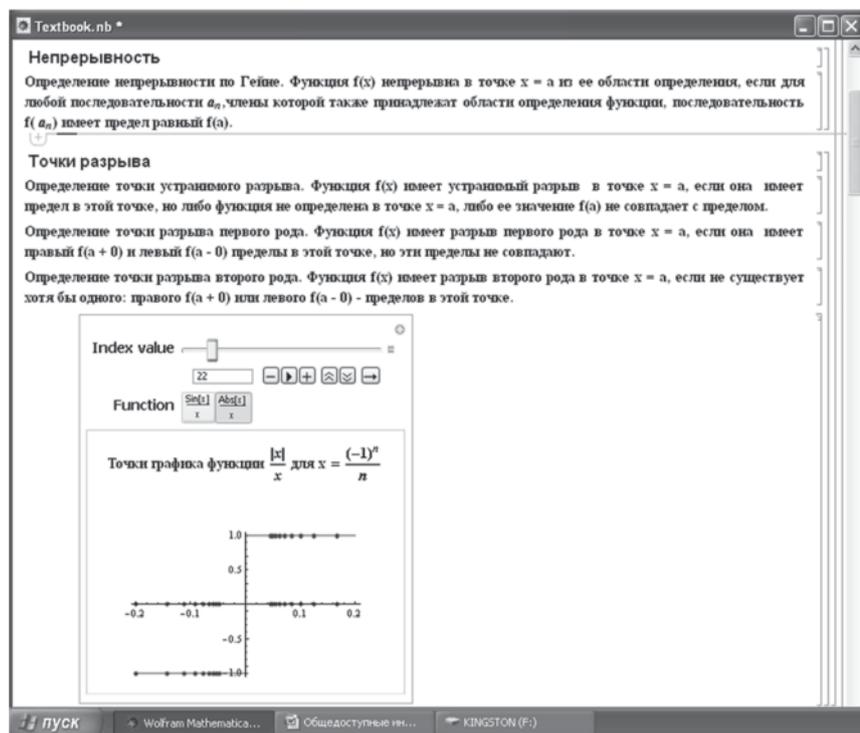


Рис. 1. Непрерывность и точки разрыва функций

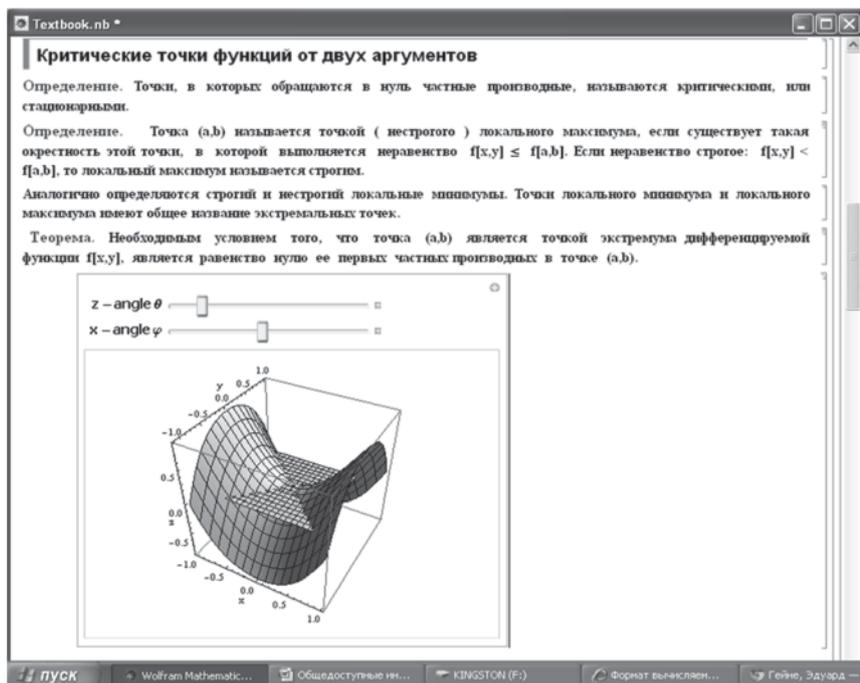


Рис. 2. Критические точки функции двух аргументов

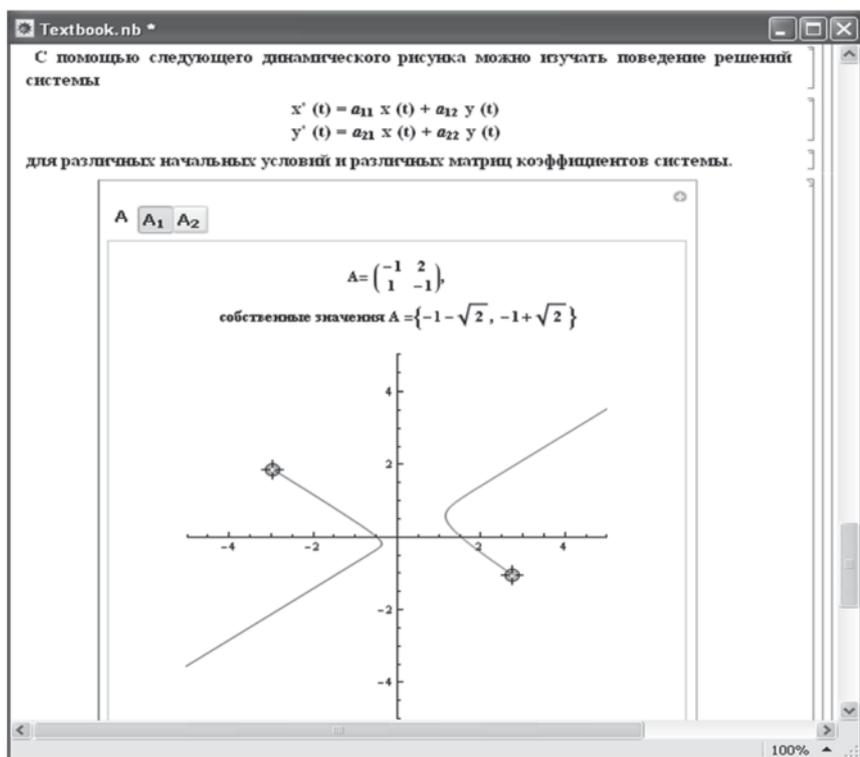


Рис. 3. Системы дифференциальных уравнений

нее определяемого авторами учебного пособия списка.

Рисунок 2 относится к разделу Критические точки функций двух аргументов. На рисунке представлен динамический объект в виде графика некоторой функции вмес-

те с касательной плоскостью к ее графику. В любой критической точке касательная плоскость горизонтальна. Если в некоторой окрестности критической точки график функции целиком расположен над касательной плоскостью, то

критическая точка есть локальный минимум. Если под плоскостью – критическая точка есть локальный максимум. Если же частично над плоскостью, а частично под плоскостью, то критическая точка называется седловой, т.е. локального экстремума нет.

Чтобы сначала догадаться, а потом доказать, что критическая точка есть локальный экстремум или она является седловой точкой, надо хорошо рассмотреть график функции вместе с касательной плоскостью. Для этого динамический объект рисунка 2 имеет средства управления в виде ползунков. Перемещение ползунков приводит к вращению графика как целого, или, иначе, к изменению точки, с которой рассматривается график. Его можно рассмотреть с различных сторон, а также сверху или снизу

Рисунок 3 содержится в разделе Системы дифференциальных уравнений первого порядка учебного пособия. В нем рассматриваются однородные системы вида:

$$\begin{aligned} x'(t) &= a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ y'(t) &= a_{21}x(t) + a_{22}y(t). \end{aligned}$$

Поведение решений такой системы зависит от свойств матрицы  $A$  коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и от начальных условий.

На интерактивном динамическом объекте рисунка 3 изображены две начальные точки, положение которых можно изменять с помощью мышки. При этом автоматически вычисляется новое решение, и траектория его отображается на рисунке. Две начальные точки существенно повышают информативность рисунка, так как позволяют сравнивать прежнее решение с вновь вычисленным.

Использование описываемого динамического объекта позволяет изучать эффекты, практически никогда не обсуждаемые, или обсуждаемые, но с колоссальными временными затратами при традиционных технологиях преподавания. Например, эффект разделения об-

ласти рисунка на зоны притяжения элементов  $+\infty$  или  $-\infty$

Второй элемент управления динамическим объектом позволяет изменять матрицу коэффициентов системы с одновременным вычислением ее собственных значений. Как известно, если хотя бы одно собственное значение положительно, то траектории системы почти для всех начальных условий уходят в бесконечность. Если же собственные значения отрицательные, то все траектории стремятся к началу координат.

### 3. Методика создания CDF-пособий

Интерактивные электронные учебные пособия в формате CDF создаются с помощью последней, 9-й версии системы «Математика», разрабатываемой фирмой Wolfram Research (США). Из двенадцати форматов электронных документов системы выбирается формат Учебник. Он наиболее удобен для написания учебного пособия, а документ выглядит максимально приближенным к обычному текстовому учебнику на бумаге. По мере необходимости авторы учебника создают интерактивные иллюстрации и пишут программы для вычислений формульного материала.

После написания учебника и отладки программ документ экспортируется либо в виде отдельного файла с расширением cdf, либо в виде фрагмента HTML-документа, предназначенного для размещения на вебсервере.

Отдельные CDF-документы открываются с помощью свободно распространяемой программы CDF Reader. При просмотре документов, размещенных на вебсервере, программа просмотра автоматически подгружается в виде плагина браузера.

### Литература

1. Воробьев Е.М. Введение в систему символьных, графических и численных расчетов «Математика»: Учебное пособие для вузов. – М.: Диалог-МИФИ, 2005.
2. Воробьев Е.М., Никишкин В.А. Информационная технология преподавания математических дисциплин, основанная на системах Математика и Вебматематика // Экономика, статистика, информатика. Вестник УМО МЭСИ: Научно-практический журнал. – М.: МЭСИ № 1–2/2009. – с. 43–48.
3. Воробьев Е.М., Никишкин В.А. Методика и опыт обучения вы-

сшей математике с помощью системы ВебМатематика 3 // Открытое образование, №5/2011, с.4–11

4. Воробьев Е.М. Математический анализ с системами Математика и Вебматематика. Непрерывные функции // Образовательные технологии и общество, №2/2012. С. 422–432.

### References

1. Vorobyov E.M. Introduction to symbolic, graphical and numerical calculations “Mathematics”: Uchebnoe posobie dlya vuzov. – M.: Dialog-MIFI, 2005.
2. Vorobyov E.M., Nikishkin V.A. Information technology teaching mathematics based on systems and Mathematics Vebmatematika // Ekonomika, statistika, informatika. Vestnik UMO MESI: Nauchno-prakticheskij zhurnal. – M.: MESI № 1–2/2009. – S. 43–48.
3. Vorobyov E.M., Nikishkin V.A. Methodology and experience of higher mathematics teaching with the help of VebMatematika 3 // Otkrytoe obrazovanie, №5/2011, s. 4–11
4. Vorobyov E.M. Mathematical analysis of systems and Mathematics Vebmatematika. Continuous functions // Obrazovatelnye tehnologii i obshchestvo, №2/2012, s.422–432.