ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ НА МАКСИМУМ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ – ДИСПЕРСИЯ» И НА МИНИМУМ ДИСПЕРСИИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ ПО ДОХОДНОСТИ

УДК 519.863

Мария Сергеевна Прохорова,
аспирантка кафедры «Теоретическая информатика и дискретная математика» Московского педагогического государственного университета (Москва),
Тел.: 8 (909) 863-10-74
Эл. почта: prokhorova.ms@yandex.ru.

Проведено исследование задач нахождения оптимального портфеля ценных бумаг с использованием сверток математического ожидания доходности портфеля и дисперсии портфеля. Получено значение коэффициента риска, при котором задача максимизации дисперсии с ограничением по доходности эквивалентна задаче максимизации линейной свертки критериев «доходность – дисперсия». Предложен автоматизированный метод нахождения решения, продемонстрировавший результаты проведенного исследования.

Ключевые слова: *оценка эффективности, оценка риска, коэффициент риска, свертка критериев.*

Maria S. Prokhorova,
Post-graduate student, the Department «Theoretical Computer Science and Discrete Mathematics» of the Moscow Pedagogical State University (Moscow),
Tel.: 8 (909) 863-10-74
E-mail: prokhorova.ms@yandex.ru.

STUDY LINKS SOLVING THE MAXIMUM TASK OF LINEAR CONVOLUTION «EXPECTED RETURNS-VARIANCE» AND THE MINIMUM VARIANCE WITH RESTRICTIONS ON RETURNS

The article deals with a study of problems of finding the optimal portfolio securities using convolutions expectation of portfolio returns and portfolio variance. Value of the coefficient of risk, in which the problem of maximizing the variance – limited yield is equivalent to maximizing a linear convolution of criteria for «expected returns-variance» is obtained. An automated method for finding the optimal portfolio, on the basis of which the results of the study demonstrated is proposed.

Keywords: *efficiency estimation, risk estimation, risk coefficient, convolution of criteria.*

1. Введение

Вопросам поведения инвесторов на фондовом рынке и принятия ими решения о составе своих портфелей ценных бумаг посвящена обширная литература (см., например, [1–9]). Статическая постановка задачи формирования портфеля впервые сформулирована Г. Марковицем [8]. Заметим, что Г. Марковиц в работе [8] не формулировал ее в виде задачи максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание – дисперсия», а говорил об эффективных портфелях. В книге [9] задача поиска оптимального портфеля была поставлена им как задача минимизации разности дисперсии и математического ожидания доходности портфеля (коэффициент риска при дисперсии равен 1). Кроме того, в той же книге рассмотрена задача на максимум математического ожидания доходности при ограничении на дисперсию, а наиболее распространена сейчас задача минимизации дисперсии при ограничении по доходности. В работе [2] авторами предложена задача минимизации свертки типа отношения с функцией риска, заданной в метрике l_2 (СКО), а также задача с вероятностной функцией риска. Однако любая задача, решением которой является эффективный портфель, эквивалентна задаче максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание – дисперсия» (в силу свойств выпуклости она представляет собой необходимые и достаточные условия Парето-оптимальности). В настоящей статье рассмотрены два метода многокритериальной оптимизации: линейная свертка критериев «математическое ожидание – дисперсия» и перевод одного критерия в ограничение, где в ограничение переводится математическое ожидание доходности портфеля. Показана эквивалентность этих двух методов нахождения оптимального портфеля; оптимальный выбор на основе метода ограничений приводят к одному из эффективных портфелей, соответствующему определенному значению коэффициента риска при дисперсии в задаче максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание – дисперсия». Найдена связь между параметром ограничения и коэффициентом риска.

2. Модель «математическое ожидание – дисперсия»

В основе рассматриваемых нами математических моделей фондового рынка лежит предположение, что теоретически существует вероятностное распределение n-мерного вектора случайных величин доходностей r_i финансовых инструментов на фондовом рынке. При этом известно, что доходности представляют собой взаимосвязанные случайные величины и мерой, определяющей эту взаимосвязь, служит ковариация доходностей. Будем считать, что фондовый рынок характеризуется вектором математических ожиданий доходностей финансовых инструментов $\overline{r} = (\overline{r}_1,...,\overline{r}_i,...,\overline{r}_n)$ и ковариационной матрицей $\sigma = (\sigma_{ij})_{n\times n}$. Предположим, что инвесторы основывают свое поведение на этой информации. Различие между ними заключается в отношении к риску, выражающееся в значении коэффициента в целевой функции, представляющей собой линейную свертку двух критериев: математического ожидания и дисперсии случайных доходностей портфелей.

Рассмотрим индивидуальное поведение инвестора, управление которого есть вектор x (портфель инвестиций), компоненты которого x_i – доли средств, вкладываемых в финансовые инструменты из конечного списка ($i = 1,…,n$). Определим оптимальный портфель как решение задачи на максимум линейной свертки критериев математического ожидания и дисперсии случайного значения доходности портфеля:

$$\max_x[\bar{r}x-\alpha(x\sigma x)],$$
$$xe=1,\ x\geq 0, \qquad (1)$$

где $\alpha>0$ – весовой коэффициент, определяющий отношение инвестора к риску (коэффициент риска), $e=(1,\ldots,1)$.

Следуя [10], будем называть портфель полноразмерным, если у составляющего его вектора x все компоненты больше нуля.

Решение задачи (1) для полноразмерных портфелей приведено в работе [2], а именно, функция Лагранжа для задачи (1) имеет вид

$$L(x,\lambda)=\bar{r}x-\alpha(x\sigma x)+\lambda(1-xe) \qquad (2)$$

условия оптимальности полноразмерного портфеля приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\bar{r}-2\alpha\sigma x^0=\lambda^0 e,\ x^0 e=1. \qquad (3)$$

Из (3) состав оптимального полноразмерного портфеля имеет вид

$$x^0(\alpha)=\frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}+$$
$$+(\sigma^{-1}\bar{r}-\frac{e\sigma^{-1}\bar{r}}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e)\frac{1}{2\alpha}, \qquad (4)$$

Здесь и далее мы не делаем различия в обозначении вектора-строки и вектора-столбца, считая их соответствующими требованиям операций умножения матриц и векторов.

3. Модель с ограничением по доходности

Определим оптимальный портфель как решение задачи на минимум дисперсии при ограничении по математическому ожиданию доходности портфеля:

$$\min_x x\sigma x,$$
$$\bar{r}x=r_p,\ xe=1,\ x\geq 0, \qquad (5)$$

где r_p – требуемое значение математического ожидания доходности портфеля.

Функция Лагранжа для задачи (5) имеет вид

$$L_1(x,\lambda_1,\lambda_2)=$$
$$=x\sigma x+\lambda_1(r_p-\bar{r}x)+\lambda_2(1-xe) \qquad (6)$$

Условия оптимальности полноразмерного портфеля приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$2\sigma x^0=\lambda_1^0\bar{r}+\lambda_2^0 e,$$
$$\bar{r}x^0=r_p,\quad x^0 e=1. \qquad (7)$$

Из первой группы уравнений (7) выразим x^0:

$$x^0=\frac{\sigma^{-1}}{2}(\lambda_1\bar{r}+\lambda_2 e) \qquad (8)$$

Подставив его в остальные уравнения (7), получаем систему для нахождения множителей Лагранжа λ_1, λ_2:

$$\frac{\bar{r}\sigma^{-1}}{2}(\lambda_1^0\bar{r}+\lambda_2^0 e)=r_p,$$
$$\frac{e\sigma^{-1}}{2}(\lambda_1^0\bar{r}+\lambda_2^0 e)=1,$$

которая эквивалентна системе

$$\lambda_1^0\frac{\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r}}{2}+\lambda_2^0\frac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{2}=r_p,$$
$$\lambda_1^0\frac{e\sigma^{-1}\bar{r}}{2}+\lambda_2^0\frac{e\sigma^{-1}e}{2}=1. \qquad (9)$$

Выражая λ_1^0 и λ_2^0 из (9) по формулам Крамера при условии, что определитель системы $\frac{1}{4}(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)-(e\sigma^{-1}\bar{r})^2$ отличен от нуля, получаем:

$$\lambda_1^0=\frac{2(r_p(e\sigma^{-1}e)-\bar{r}\sigma^{-1}e)}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)-(e\sigma^{-1}\bar{r})^2},$$
$$\lambda_2^0=\frac{2(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r}-r_p(\bar{r}\sigma^{-1}e))}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)-(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}. \qquad (10)$$

Теорема 1. Если для $\bar{r},\sigma$ и r_p, удовлетворяющих условию

$$\max(\frac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{r_p(e\sigma^{-1}e)},\frac{(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)})<1\vee$$
$$\vee\min(\frac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{r_p(e\sigma^{-1}e)},\frac{(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)})>1 \qquad (11)$$

коэффициент риска

$$\alpha=\frac{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)-(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}{2(r_p(e\sigma^{-1}e)-(\bar{r}\sigma^{-1}e))},$$

то решение задач (1) и (5) совпадают для полноразмерных портфелей.

Доказательство: Преобразуем функцию Лагранжа (6) к виду:

$$L_1(x,\lambda_1,\lambda_2)=$$
$$=-\lambda_1(\bar{r}x-\frac{1}{\lambda_1}x\sigma x-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(1-xe)-r_p).$$

Тогда имеем

$$\widetilde{L}(x,\lambda_1,\lambda_2)=$$
$$=r_p-\frac{L_1(x,\lambda_1,\lambda_2)}{\lambda_1}=$$
$$=\bar{r}x-\frac{1}{\lambda_1}x\sigma x-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(1-xe).$$

Экстремальное значение функции $\widetilde{L}(x,\lambda_1,\lambda_2)$ в точке $x^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0$, определяемой согласно (8) и (10), равно

$$\widetilde{L}(x^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0)=$$
$$=\bar{r}x^0-\frac{1}{\lambda_1^0}x^0\sigma x^0-\frac{\lambda_2^0}{\lambda_1^0}(1-x^0 e).$$

Пусть

$$\frac{1}{\lambda_1^0}=\alpha,$$

тогда

$$\widetilde{L}(x^0,\lambda_2^0)=$$
$$\bar{r}x^0-\alpha x^0\sigma x^0-\alpha\lambda_2^0(1-x^0 e).$$

При этом x^0,λ_2^0 удовлетворяют условиям экстремума функции Лагранжа $\widetilde{L}(x,\lambda_2)$ для $x>0$:

$$\bar{r}-2\alpha\sigma x^0=-\alpha\lambda_2^0 e,\quad x^0 e=1. \qquad (12)$$

Левые части первой группы уравнений в (3) и (12) равны, следовательно, равны и правые, т.е. $\lambda^0=-\alpha\lambda_2^0$. Значит (3) эквивалентно (12), следовательно, решения задач (1) и (5) совпадают для полноразмерных портфелей.

Так как по условию $\alpha>0$, то и $\lambda_1^0>0$. Согласно (10)

$$\frac{(r_p(e\sigma^{-1}e)-\bar{r}\sigma^{-1}e)}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)-(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}>0,$$

что эквивалентно

$$sign[r_p(e\sigma^{-1}e)-\bar{r}\sigma^{-1}e]=$$
$$=sign[(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)-(e\sigma^{-1}\bar{r})^2].$$

В [10] показано, что $\forall\xi\quad \xi\sigma^{-1}\xi>0$. Принимая во внимание последнее, имеем два случая:

1) $sign=+1$, т.е.

$$\frac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{r_p(e\sigma^{-1}e)}<1\wedge\frac{(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)}<1$$

или

$$\max\left[\frac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{r_p(e\sigma^{-1}e)}, \frac{(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)}\right] < 1;$$

2) $sign = -1$, т.е.

$$\frac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{r_p(e\sigma^{-1}e)} > 1 \wedge \frac{(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)} > 1$$

или

$$\min\left[\frac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{r_p(e\sigma^{-1}e)}, \frac{(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)}\right] > 1.$$

Объединяя оба случая, получаем условие (11). Теорема доказана полностью.

По Марковицу в задачах (1) и (5) предполагается, что оптимальные портфели являются точками множества эффективных (Парето-оптимальных) портфелей. Для задачи (1) условием принадлежности оптимальных портфелей эффективному множеству является условие $\alpha > 0$. Если в задаче (5) вместо ограничения типа равенства $\bar{r}x = r_p$ взять $\bar{r}x \geq r_p$, то получающиеся при различных значениях r_p оптимальные портфели такой задачи также будут принадлежать эффективному множеству. При ограничении $\bar{r}x = r_p$ это происходит не при всех r_p. Условие (11) характеризует принадлежность оптимальных портфелей задачи (5) множеству эффективных (Парето-оптимальных) портфелей, а соответствующее значение α, представленное в теореме 1 дает возможность получить одинаковые оптимальные решения задач (1) и (5) на Парето-оптимальном множестве.

4. Автоматизация метода нахождения решения

Предлагается программа, написанная на языке программирования VB.NET, использующая статистические данные для нахождения математических ожиданий случайных значений доходностей и ковариационной матрицы ценных бумаг, а также математические модели (1) и (5) для нахождения оптимального состава портфеля инвестора. Некоторые характеристики программы были описаны в [11]. В данной работе использовались статистические данные цен акций компаний «Аэрофлот», «МТС» и «Мегафон» за период с января 2013 г. по январь 2014 г. (рис. 1–3), т.е. выбраны были акции с номерами 1, 4 и 5 из обработанной программой статистики [12] по восьми ведущим российским компаниям (рис. 4).

Рис. 1. *Динамика стоимостей акций компании «Аэрофлот»*

Рис. 2. *Динамика стоимостей акций компании «МТС»*

Рис. 3. *Динамика стоимостей акций компании «Мегафон»*

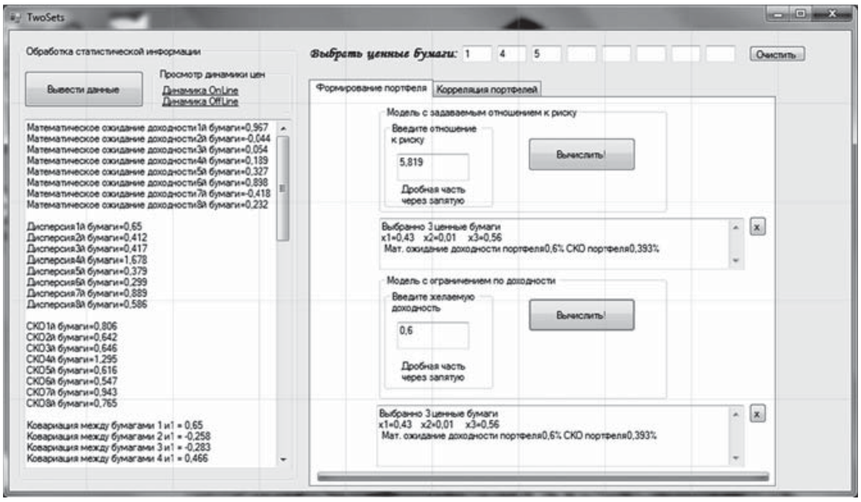

Рис. 4. *Фрагмент работы программы*

Доходности акций этих компаний определялись с использованием ежедневных цен закрытия торговых сессий.

На рис. 4 показан фрагмент работы программы. В фрейме (GroupBox) «Обработка статистической информации» можно посмотреть математические ожидания доходностей ценных бумаг за каждый рабочий день, СКО и ковариацию всех восьми ценных бумаг. Для акций компаний «Аэрофлот», «МТС» и «Мегафон» (акции с номерами 1, 4 и 5) имеем вектор математических ожиданий доходностей акций $\bar{r} = (0{,}97; 0{,}33; 0{,}9)$, ковариационная матрица

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0{,}65 & -0{,}18 & -0{,}3 \\ -0{,}18 & 0{,}38 & 0{,}06 \\ -0{,}3 & 0{,}06 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Пусть требуемое значение доходности портфеля $r_p = 0{,}6$. Условие (11) теоремы 1 при этом выполняется:

$$\frac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{r_p(e\sigma^{-1}e)} = 0{,}907,$$

$$\frac{(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)} = 0{,}753$$

и $\max\{0{,}907;\ 0{,}753\} < 1$. Тогда по теореме 1 $\alpha = 5{,}819$.

В фрейме «Модель с задаваемым отношением к риску» пользователь задает коэффициент риска $\alpha = 5{,}819$, после чего программа определяет оптимальный состав портфеля $x^{01} = (0{,}43;\ 0{,}01;\ 0{,}56)$. В фрейме «Модель с ограничением по доходности» пользователь задает требуемое значение доходности портфеля $r_p = 0{,}6$, после чего программа определяет оптимальный состав портфеля $x^{02} = (0{,}43;\ 0{,}01;\ 0{,}56)$. Таким образом, при $r_p = 0{,}6$ и $\alpha = 5{,}819$ решение задач (1) и (5) совпадают для полноразмерных портфелей.

Пусть теперь требуемое значение доходности портфеля $r_p = 0{,}5$. Условие (11) теоремы 1 при этом не выполняется:

$$\frac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{r_p(e\sigma^{-1}e)} = 1{,}089$$

и
$$\frac{(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)} = 0{,}753.$$

Используя теорему 1, получаем $\alpha = -7{,}331$. Задача (1) дает решение $x^{01} = (0;1;0)$, а задача (5) – $x^{02} = (0{,}29;0{,}092;0{,}617)$. Решения этих задач лежат за пределами эффективного множества: значение доходности $r_p = 0{,}5$ меньше минимальной доходности на эффективном множестве соответствует портфелю $x^{02} = (0{,}29;0{,}092;0{,}617)$, расположенному на юго-западной границе множества возможных портфелей, значение $\alpha = -7{,}331$ дает отрицательный наклон кривой безразличия целевой функции задачи (1), максимальное значение которой достигается в точке $x^{01} = (0;1;0)$ на северо-восточной границе множества возможных портфелей.

5. Заключение

Таким образом, нами рассмотрены две постановки задач нахождения оптимального портфеля: с использованием линейной свертки критериев «математическое ожидание – дисперсия» и метода ограничений. Для случая полноразмерных портфелей найдено значение коэффициента риска в модели «математическое ожидание – дисперсия», при котором решения этих двух задач совпадают при выполнении некоторого условия, налагаемого на исходные данные моделей. Отметим, что эквивалентность задач (1) и (5) справедлива без предположения о полноразмерности оптимальных портфелей, однако для нахождения связи между коэффициентом риска α и множителем Лагранжа λ_1 потребуется вводить некоторую подматрицу ковариационной матрицы, которая соответствует ненулевым значениям вектора x^0. При наличии коротких продаж, предполагающих отсутствие в моделях условия неотрицательности x, результат распространяется на произвольные оптимальные портфели.

Результаты проведенного исследования дают возможность определять отношение инвестора к риску (коэффициент риска), если для нахождения оптимального портфеля использовалась модель с ограничением по доходности, а также тестировать (отлаживать) программу. Исследование также может быть продолжено для сверток другого типа.

Список литературы:

1. Горелик В.А., Золотова Т.В. Модели оценки коллективного и системного риска. Научное издание. – М.: ВЦ РАН, 2011. – 163 с.

2. Горелик В.А., Золотова Т.В. Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах. Научное издание. М.: ВЦ РАН, 2009. 162 с.

3. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2004. – Т. XII. – 1028 с.

4. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. – М.: ФАЗИС, 1998. – 512 с.

5. Горелик В.А., Золотова Т.В. Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка // Госу-

дарственный университет Минфина России. Финансовый журнал. – 2012. – № 3. – С. 43–52.

6. Горелик В.А., Золотова Т.В. Критерии устойчивости фондового рынка, их связь с информированностью и принципами поведения инвесторов // Финансовый журнал. М.: «Научно-исследовательский финансовый институт». – 2013. – №3. – С. 17–28.

7. Горелик В.А., Золотова Т.В. О некоторых оценках устойчивости фондового рынка и влиянии на них информированности инвесторов // Проблемы управления. – 2013. – № 6. – С. 41–47.

8. Markowitz H.M. Portfolio selection // Journal of Finance. – 1952. – №7. – P. 77–91.

9. Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment. – N.-Y.: Wiley, 1959. – 344 c.

10. Горелик В.А., Золотова Т.В. Некоторые вопросы оценки корреляции доходностей инвестиционных портфелей // Проблемы управления. – 2011. – № 3. – С. 36–42.

11. Зверева М.С. (Прохорова М.С.) Вопросы автоматизации процесса оптимального выбора с учетом риска // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова – Магнитогорск: Изд-во МГТУ им. Г.И. Носова, 2011. – №2 – С. 42–44.

12. http://www.finam.ru/analysis/profile00008/default.asp (дата обращения: 18.01.2014)

References

1. Gorelik V.A., Zolotova T.V. Assessment model of collective and systemic risk. Scientific publication. – M.: VC RAN, 2011. – 163 s.

2. Gorelik V.A., Zolotova T.V. Evaluation criteria and optimality of risk in complex organizational systems . Scientific publication . M. : M.: VC RAN, 2011. –162 s.

3. Sharp W., Alexander G., Bailey J. Investments: Per. s angl. – M.: INFRA-M, 2004. – T. XII. – 1028 s.

4. Shiryaev A.N. Essentials of Stochastic Finance . V. 1. Facts. Model. – M.: Fazis, 1998. – 512 p.

5. Gorelik V.A., Zolotova T.V. Estimated correlation of returns on investment portfolios and the stability of the stock market // Gosudarstvennyj universitet Minfina Rossii. Finansovyj zhurnal. – 2012. – № 3. – S. 43–52.

6. Gorelik V.A., Zolotova T.V. Criteria for the stability of the stock market, their relationship with the awareness and the principles of investor behavior // Finansovyj zhurnal. M.: «Nauchno-issledovatelskij finansovyj institut». – 2013. – №3. – S. 17–28.

7. Gorelik V.A., Zolotova T.V. Some estimates of stability of the stock market and the effect on their awareness of investors // Problemy upravleniya. – 2013. – № 6. – S. 41–47.

8. Markowitz H.M. Portfolio selection // Journal of Finance. – 1952. – № 7. – P. 77–91.

9. Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment. – N.-Y.: Wiley, 1959. – 344 p.

10. Gorelik V.A., Zolotova T.V. Some questions assess the correlation of returns of investment portfolios // Problemy upravleniya. – 2011. – № 3. – S. 36–42.

11. Zvereva M.S. (Prokhorova M.S.) Questions automate the process of optimal choice of risk // Vestneyk Magnitogorskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta im. G. I. Nosova – Magnitogorsk: Izd-vo MGTU im. G.I. Nosova, 2011. – №2 – S. 42–44.

12. http://www.finam.ru/analysis/profile00008/default.asp (date of access: 18.01.2014)