ЗАВИСИМОСТЬ ВАЛОВОГО ВНУТРЕННЕГО ПРОДУКТА ОТ ВРЕМЕНИ В МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАЛЕЦКОГО С УЧЕТОМ ИНВЕСТИЦИОННОГО ВРЕМЕННОГО ЛАГА

УДК 338.27

Эдуард Аршавирович Геворкян,
доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии естествознания, профессор кафедры высшей математики Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)
Тел.: 8 (903) 139-73-97
Эл. почта: EGevorkyan@mesi.ru

Денис Павлович Макаров,
Студент Института экономики и статистики, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)
Тел.: 8 (964) 591-46-16
Эл. почта: makarov132@gmail.com

Джоджина Самовна Питерсен,
Студентка Института экономики и статистики, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)
Тел.: 8 (903) 759-62-78
Эл. почта: dspitersen@gmail.com

Решением дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом исследована динамика изменения валового внутреннего продукта *Y*(*t*) в макроэкономической модели Калецкого с учетом временного лага в случае квадратичной зависимости функции потребления от времени. Получено аналитическое выражение для *Y*(*t*) с точностью до второго порядка включительно по малому параметру задачи. Показаны некоторые стороны влияния учета временного лага на характер изменения *Y*(*t*).

Ключевые слова: валовой внутренний продукт, функция потребления, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, инвестиционный временной лаг.

Eduard A. Gevorkyan,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics (MESI)
Tel.: 8-903-139-73-97
E-mail: EGevorkyan@mesi.ru

Denis P. Makarov
Student of the Institute of Economics and Statistics, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics (MESI)
Tel.: 8-964-591-46-16
E-mail: makarov132@gmail.com

Dzhodzhina S. Pitersen,
Student of the Institute of Economics and Statistics, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics (MESI)
Tel.: 8-903-759-62-78
E-mail: dspitersen@gmail.com

DEPENDENCE OF THE GROSS DOMESTIC PRODUCT ON TIME IN MACROECONOMIC KALECKI'S MODEL IN VIEW OF AN INVESTMENT TEMPORARY LAG

By solving the differential equation with lagging argument the dynamics of variation of the gross domestic product *Y*(*t*) in macroeconomic Kalecki's model in view of a temporary lag in case of square-low dependence of consumption function on time is investigated. Analytical expression for *Y*(*t*) to within the second order inclusive on small parameter of the problem is received. Some sides of influence of the account of the temporary lag on character of variation of *Y*(*t*) are shown.

Keywords: gross domestic product, consumption function, differential equation with lagging argument, investment temporary lag.

1. Введение

В работе [1] с применением математических методов решена задача динамики изменения валового внутреннего продукта в классической модели Калецкого с учетом инвестиционного временного лага в случае линейной зависимости функции потребления от времени. Ниже решается аналогичная задача с применением теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, когда потребление является квадратичной функцией от времени.

2. Постановка задачи и метод решения

Как известно, в классической модели воспроизводства Калецкого с учетом инвестиционного временного лага τ (накопление в момент времени t зависит от валового внутреннего продукта и потребления в момент времени $t - \tau > 0$) валовой внутренний продукт $Y(t)$ удовлетворяет следующему линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка с запаздывающим аргументом [1–4]

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B} \cdot Y(t-\tau) = -\frac{C(t-\tau)}{B}, \tag{1}$$

где $C(t - \tau)$ – функция потребления, B – валового внутреннего продукта (отношение нормы производственных накоплений к темпу прироста валового внутреннего продукта).

Рассмотрим квадратичную зависимость $C(t–\tau)$ от времени в виде

$$C(t-\tau) = (1-\alpha)(t-\tau)^2 \tag{2}$$

где $0 \le \alpha \le 1$ – норма производственного накопления.

Подставляя (2) в (1), получим

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B} \cdot Y(t-\tau) = -\frac{(1-\alpha)(t-\tau)^2}{B}. \tag{3}$$

Как известно [5], общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (3) есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B} \cdot Y(t-\tau) = 0 \tag{4}$$

и одного частного решения неоднородного уравнения (3), то есть

$$Y_{о.н.}(t) = Y_{о.о.}(t) + Y_{ч.н.}(t). \tag{5}$$

Решение уравнения (4) будем искать методом Эйлера в виде

$$Y_{о.о.}(t) = e^{\lambda t}, \tag{6}$$

где неизвестное число λ есть прирост валового внутреннего продукта. Подставляя (6) в (4), получим следующее характеристическое уравнение для определения λ.

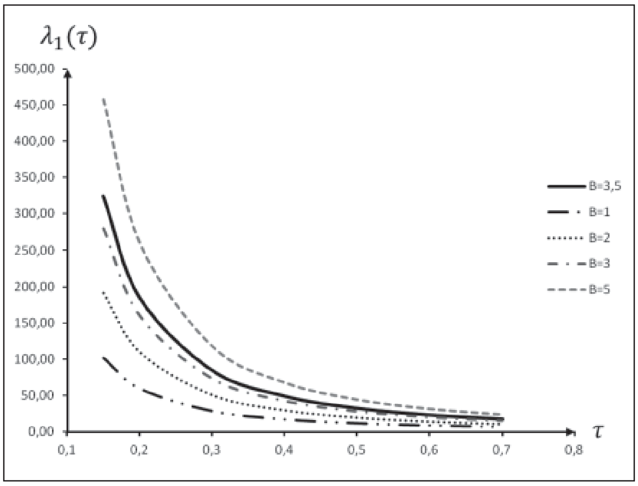

Рис. 1. *Зависимость λ_1 от τ*

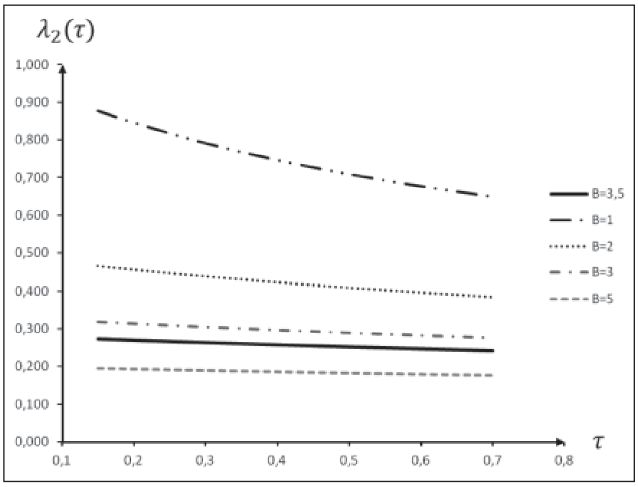

Рис. 2. *Зависимость λ_2 от τ*

$$\lambda = \frac{1}{B} e^{-\lambda\tau}. \qquad (7)$$

Разложим $e^{-\lambda\tau}$ в ряд Тейлора вокруг $\tau = 0$ и ограничимся тремя членами разложения при малых значениях параметра $\lambda\tau$

$$e^{-\lambda\tau} \cong 1 - \lambda\tau + \frac{\lambda^2\tau^2}{2}. \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и решая полученное квадратное уравнение, получим два действительных решения для λ

$$\lambda_{1,2}(\tau) = \frac{B + \tau \pm \sqrt{B^2 + 2B\tau - \tau^2}}{\tau^2}$$

$$\left(B^2 + 2B\tau - \tau^2 > 0\right). \qquad (9)$$

Графики зависимости $\lambda_1(\tau)$ и $\lambda_2(\tau)$ при разных значениях B приведены на рисунках 1 и 2.

Кривые построены согласно формулам (9) для значений B = 1; 2; 3; 3,5; 5 при изменении τ от 0 до 1. Как следует из (9) (см. также рисунки 1 и 2) прирост валового внутреннего продукта в зависимости от временного лага представляет собой убывающую функцию. Заметим, что при наличии у характеристического уравнения двух действительных корней λ_1 и λ_2 общее решение однородного дифференциального уравнения (4) запишется в виде

$$Y_{o.o.}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (10)$$

где c_1 и c_2 пока произвольные постоянные. Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (3) найдем методом подбора. Его будем искать в виде

$$Y_{ч.н.}(t) = \frac{\gamma}{2B} t^2 + \gamma t + \beta - \theta + 1, \qquad (11)$$

где γ, β и θ пока неизвестные величины. Подставляя (11) в (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t справа и слева, для γ, β и θ получим

$$\gamma = 2B(1-\alpha),$$
$$\beta = (1-\alpha)\left(2B^2 - 2B\tau + \tau^2\right), \qquad (12)$$
$$\theta = 1 + \tau^2.$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (3) получим из (5) с учетом (10) и (11) в виде

$$Y_{о.н.}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} +$$
$$+ \frac{\gamma}{2B} t^2 + \gamma t + \beta - \theta + 1. \qquad (13)$$

Коэффициенты и находятся из начальных условий Коши

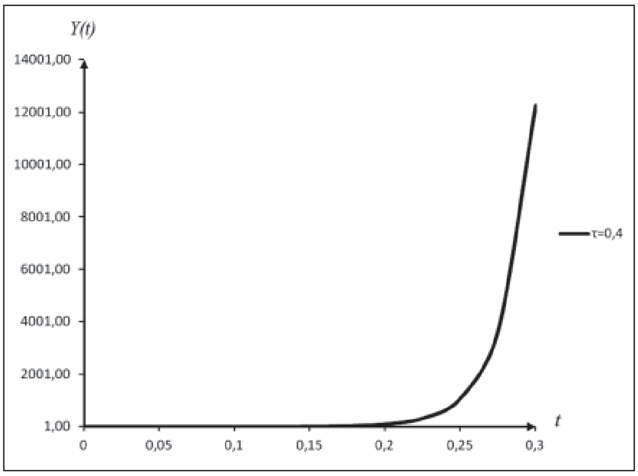

Рис. 3. *Зависимость валового внутреннего продукта от времени*

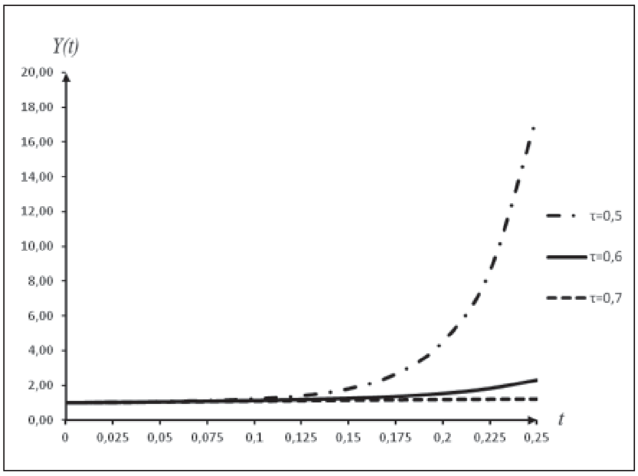

Рис. 4. *Зависимость валового внутреннего продукта от времени*

$$Y_{о.н.}(0)=1, Y'_{о.н.}(0)=1. \quad (14)$$

Вычисления приводят к следующим выражениям для c_1 и c_2

$$c_1=\frac{(\theta-\beta)\lambda_2+\gamma-1}{\lambda_2-\lambda_1}, \quad c_2=\frac{-(\theta-\beta)\lambda_1-\gamma+1}{\lambda_2-\lambda_1}. \quad (15)$$

Тогда из (13) с учетом (15) получим

$$Y_{о.н.}(t)=\frac{(\theta-\beta)\lambda_2+\gamma-1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1 t}+\frac{-(\theta-\beta)\lambda_1-\gamma+1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 t}+\frac{\gamma}{2B}t^2+\gamma t+\beta-\theta+1. \quad (16)$$

На рисунках 3 и 4 приведены графики зависимости валового внутреннего продукта от времени при следующих значениях параметров: $\alpha = 0,5$; $B = 0,5$; $\tau = 0,4$; 0,5; 0,6; 0.7. Графики построены согласно формуле (16).

Как следует из (16) (см. также рис. 3 и 4) валовой внутренний продукт $Y(t)$ является возрастающей функцией в зависимости от времени. При этом, чем больше временной лаг τ, тем медленнее происходит возрастание $Y(t)$.

3. Заключение

В работе решена задача динамики валового внутреннего продукта с учетом временной задержки, которая реально присутствует между величинами, характеризующими экономический процесс. При этом предполагается, что функция потребления квадратично зависит от времени. С математической точки зрения задача сводится к нахождению общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Анализ полученных результатов показывает, что учет временного лага существенно влияет на характер изменения валового внутреннего продукта в зависимости от времени. В частности показано, что с возрастанием временного лага прирост валового внутреннего продукта убывает, а сам валовой внутренний продукт как функция от времени является возрастающей функцией. При этом, чем больше временной лаг, тем медленнее она возрастает.

Литература

1. Геворкян Э.А., Трофимов М.В., Шукенбаева А.А. Динамика изменения валового внутреннего продукта в макроэкономической модели воспроизводства с учетом временного лага // Научно-практический журнал «Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО», 2012. № 2. С. 109-112.

2. Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства. М.: Экономика, 1985. 240 с.

3. Геворкян Э.А. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: МЭСИ, 2012. 79 с.

4. Аллен Р. Математическая экономия. М.: Иностранная литература, 1963. 667 с.

5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. М.: ЛКИ, 2008. 320 с.

References

1. Gevorkyan E.A., Trofimov M.V., Shukenbaeva A.A. Dynamics of variation of a gross domestic product in macroeconomic model of reproduction with account of time lag//Nauchno-prakticheskiy zhurnal “Ekonomika, Statistika i Informatika. Vestnik UMO”, 2012. No 2. P. 109-112.

2. Granberg A.G. Dynamic models of a national economy. M.: Economics, 1985. 240 p.

3. Gevorkyan E.A. Differential equations with lagging argument. M.: MESI, 2012. 79 p.

4. Allen R. Mathematical economics. Translation from English. M.: Inostrannaya Literatura, 1963. 667 p.

5. Elsgolts L.E. Differential equations. M.: LKI, 2008. 320 p.