ПРИМЕНЕНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ РЕКЛАМНОГО АГЕНТСТВА

УДК: 311.1

Андрей Александрович Романов,
д.э.н., профессор, с.н.с. Федерального института сертификации и оценки интеллектуальной собственности и бизнеса (ЗАО «СОИС»)
Эл. почта: AARomanov@inbox.ru

Накопленный опыт в решении практических задач в сфере организации рекламной деятельности позволяет выделить по содержательной постановке четыре класса задач ориентированных на применение экономико-математических методов – задача распределения ресурсов, задача массового обслуживания, задача сетевого планирования и комбинаторные задачи.

Ключевые слова: *рекламные агентства, оптимизация, деятельность организации, экономико-математические методы.*

Andrei A. Romanov,
Doctor of Economics, Professor, Senior research fellow, Federal Institute of certification and valuation of intellectual property and business (Joint-Stock Company «SOIS»)
E-mail: AARomanov@inbox.ru

THE APPLICATION OF ECONOMIC AND MATHEMATICAL METHODS FOR OPTIMIZATION OF ACTIVITIES OF ADVERTISING AGENCY

The accumulated experience in solving practical problems in the organization of advertising activity allows allocating four classes of problems focused on application of economic and mathematical methods – resource allocation, queuing problem, network planning and combinatorial problems.

Keywords: *advertising agencies, optimization, activity of a company, economic and mathematical methods.*

1. Введение

Задача распределения ресурсов возникает, когда существует определенный набор работ, которые необходимо выполнить, а наличных ресурсов для выполнения каждой работы наилучшим образом не достаточно. В зависимости от условий задачи распределения ресурсов делятся на три группы:

1. Заданы и работы и ресурсы. Распределить ресурсы между работами таким образом, чтобы максимизировать некоторую заранее определенную меру эффективности (например, прибыль) или минимизировать ожидаемые затраты.

2. Заданы только наличные ресурсы. Определить, какой состав работ можно выполнить с учетом этих ресурсов, чтобы обеспечить максимум прибыли.

3. Заданы только работы. Определить, какие ресурсы необходимы для того, чтобы минимизировать ожидаемые затраты.

Задачи массового обслуживания рассматривают вопросы образования и функционирования очередей, с которыми приходится сталкиваться в ситуации превышения спроса над предложением на рынке рекламных услуг.

Очереди возникают из-за того, что поток клиентов на обслуживание неуправляем и случаен. Если количество пунктов обслуживания (рекламных агентств) достаточно велико, то очереди образуются редко, однако неизбежны длительные простои в работе рекламных агентств. С другой стороны, при малом количестве доступных рекламных агентств создается значительная очередь и будут потери из-за ожидания в очереди. Поэтому возможна следующая постановка задачи массового обслуживания. Определить, какое количество пунктов обслуживания необходимо, чтобы минимизировать общие ожидаемые потери от несвоевременного обслуживания и простоев.

В задачах сетевого планирования и управления рассматривается соотношение между сроком окончания крупного комплекса операций и моментами начала всех операций комплекса. Следует отметить ряд необходимых условий:

– должно существовать множество операций, которые надо выполнить для завершения всего комплекса;

– множество операций упорядочено так, что для каждой операции известно, какие операции непосредственно ей предшествуют, а какие следуют за ней;

– известна взаимосвязь между величиной требуемого ресурса и длительностью каждой операции.

2. Постановка и решение задачи

Возможны следующие постановки задач сетевого планирования и управления:

1. Задана продолжительность всего комплекса работ. Определить сроки начала каждой операции, при которых минимизируются общие затраты на выполнение всего комплекса работ.

2. Заданы общие ресурсы. Определить сроки начала каждой операции, при которых минимизируется продолжительность выполнения всего комплекса работ.

В комбинаторных задачах рассматривается множество вариантов управленческих решений и методы поиска оптимального управленческого решения при задании некоторого критерия оптимальности.

Далее рассмотрим одну из комбинаторных задач, возникающую в практике инвестирования денежных средств в несколько рекламных проектов.

Пусть дано N функций с неотрицательными значениями

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_N(x),$$

где $x = 0, 1, 2, \ldots, W$.

Определить максимум функции

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_N(x_N)$$

при ограничении

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N = W.$$

Далее рассмотрим случай $N = 3$. Необходимо вычислить

$$F_{1,2}(P) = \max[f_1(x) + f_2(P - x)],$$

где x принимает целочисленные значения от 0 до P. Величина P в свою очередь изменяется от 0 до W.

Иными словами вычисляется максимум $f_1 + f_2$ для всех рассматриваемых x_1 и x_2, таких, что

$$x_1 + x_2 = P.$$

Так получают функцию $F_{1,2}(P)$. Затем вычисляется

$$F_{1,2,3}(P) = \max[F_{1,2}(x) + f_3(P - x)].$$

Максимум функции $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$ равен $F_{1,2,3}(W)$.

Условимся, что рассматриваются три рекламных проекта A, B, C и суммарные инвестиции в эти проекты могут составлять от 1 до 10 млн руб. с шагом в 1 млн руб. Прирост прибыли от инвестирования показан в табл. 1.

Обозначим:

$f_1(x)$ – функция, соответствующая проекту A,

$f_2(x)$ – функция, соответствующая проекту B,

$f_3(x)$ – функция, соответствующая проекту C;

далее:

$F_{1,2}(P)$ – оптимальное распределение, когда P млн руб. вкладываются в проекты A и B вместе;

$F_{1,2,3}(P)$ – оптимальное распределение, когда P млн руб. вкладываются в проекты A, B и C вместе.

Например, чтобы определить $F_{1,2}(2)$, необходимо вычислить

$f_1(0) + f_2(2) = 0{,}00 + 0{,}41 = 0{,}41$

$f_1(1) + f_2(1) = 0{,}28 + 0{,}25 = 0{,}53$

$f_1(2) + f_2(0) = 0{,}45 + 0{,}00 = 0{,}45$

и выбрать максимальное значение. Таким образом, в нашем случае $F_{1,2}(2) = 0{,}53$. Вычисляем таким способом значения

$$F_{1,2}(0), F_{1,2}(1), F_{1,2}(2), F_{1,2}(3), F_{1,2}(4), \ldots, F_{1,2}(9), F_{1,2}(10),$$

что дает табл. 2.

Таблица 1

Инвестиции		Прирост прибыли	
	A	*B*	*C*
0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15
2	0,45	0,41	0,25
3	0,65	0,55	0,40
4	0,78	0,65	0,50
5	0,90	0,75	0,62
6	1,02	0,80	0,73
7	1,13	0,85	0,82
8	1,23	0,88	0,90
9	1,32	0,90	0,96
10	1,38	0,90	1,00

Таблица 2

Инвестиции P	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$F_{1,2}(P)$	Оптимальное решение при инвестициях в проекты A и B
0	0	0	0	$x_1 = 0, x_2 = 0$
1	0,28	0,25	0,28	$x_1 = 1, x_2 = 0$
2	0,45	0,41	0,53	$x_1 = 1, x_2 = 1$
3	0,65	0,55	0,70	$x_1 = 2, x_2 = 1$
4	0,78	0,65	0,90	$x_1 = 3, x_2 = 1$
5	0,90	0,75	1,06	$x_1 = 3, x_2 = 2$
6	1,02	0,80	1,20	$x_1 = 3, x_2 = 3$
7	1,13	0,85	1,33	$x_1 = 4, x_2 = 3$
8	1,23	0,88	1,45	$x_1 = 5, x_2 = 3$
9	1,32	0,90	1,57	$x_1 = 6, x_2 = 3$
10	1,38	0,90	1,68	$x_1 = 7, x_2 = 3$

Таблица 3

Инвестиции P	$F_{1,2}(x)$	$f_3(x)$	$F_{1,2,3}(P)$	Оптимальное решение при инвестициях в проекты A, B и C
0	0	0	0	$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
1	0,28	0,15	0,28	$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$
2	0,53	0,25	0,53	$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$
3	0,70	0,40	0,70	$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$
4	0,90	0,50	0,90	$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 0$
5	1,06	0,62	1,06	$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$
6	1,20	0,73	1,21	$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$
7	1,33	0,82	1,35	$x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 1$
8	1,45	0,90	1,48	$x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 1$
9	1,57	0,96	1,60	$x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = 1$
10	1,68	1,00	1,73	$x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 3$

Табл. 2 позволяет определить решения, соответствующие оптимальной прибыли при заданных инвестициях. Например, если в проекты A и B вместе вложить 4 млн руб., то в проект A надо направить 3 млн, а в B – 1 млн; прибыль в этом случае равна 0,90.

Теперь необходимо вычислить $F_{1,2,3}(P)$, то есть определить оптимальную комбинацию, когда капитал P вкладывается во все три проекта. Результаты приводятся в табл. 3. Например, для получения $F_{1,2,3}(4)$ надо выбрать максимальную из величин

$F_{1,2}(0) + f_3(4) = 0{,}00 + 0{,}50 = 0{,}50$

$F_{1,2}(1) + f_3(3) = 0{,}28 + 0{,}40 = 0{,}68$

$F_{1,2}(2) + f_3(2) = 0{,}53 + 0{,}25 = 0{,}78$

$F_{1,2}(3) + f_3(1) = 0{,}70 + 0{,}15 = 0{,}85$

$F_{1,2}(4) + f_3(0) = 0{,}90 + 0{,}00 = 0{,}90$

что соответствует оптимальной комбинации $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Окончательно получаем, что в нашем примере необходимо распределить 10 млн руб. в следующей пропорции – 4 млн вложить в проект *A*, 3 млн – в проект *B* и 3 млн – в проект *C*. Прирост прибыли в этом случае достигнет максимума и составит 1,73 млн руб.

В качестве развития рассмотренной модели можно предложить разделение имеющихся денежных средств на первоначальные инвестиции и эксплуатационные расходы.

Заказы на рекламную продукцию поступают в рекламное агентство неравномерно. По этой причине планирование основных параметров деятельности агентства должно опираться на методы теории вероятностей. Далее рассмотрим задачу планирования численности основного персонала рекламного агентства.

Условимся, что агентство имеет такое количество постоянных сотрудников, которое в состоянии ежемесячно проводить работу над *S* рекламными проектами. Для упрощения ситуации будем считать, что один сотрудник реализует один рекламный проект в течение одного месяца. В общем случае вместо одного месяца следует взять за интервал времени среднее время реализации одного рекламного проекта.

Ежемесячный заработок постоянных сотрудников примем равным C_1 руб. Если спрос на изготовление рекламной продукции превышает *S*, то рекламное агентство нанимает дополнительный основной персонал и ежемесячное содержание дополнительного сотрудника составляет C_2 руб. Может случиться, что отсутствие дополнительных сотрудников вызовет срыв контракта на изготовление рекламы; агентство расценивает это как убыток в C_3 руб. Каким числом постоянных сотрудников должно располагать агентство ежемесячно, чтобы общая себестоимость была минимальной.

Анализ данной задачи требует знания следующих статистических величин

– ежемесячный спрос на изготовителей рекламной продукции,

Таблица 4

Спрос	Частота	Вероятность	Накопленная вероятность
4	2	0,02	0,02
5	4	0,04	0,06
6	4	0,04	0,10
7	8	0,08	0,18
8	10	0,10	0,28
9	12	0,12	0,40
10	12	0,12	0,52
11	12	0,12	0,64
12	10	0,10	0,74
13	10	0,10	0,84
14	8	0,08	0,92
15	6	0,06	0,98
16	2	0,02	1

Таблица 5

Предложение	Частота	Вероятность	Накопленная вероятность
0	3	0,03	0,03
1	9	0,09	0,12
2	15	0,15	0,27
3	20	0,20	0,47
4	22	0,22	0,69
5	14	0,14	0,83
6	10	0,10	0,93
7	7	0,07	1

– ежемесячное предложение дополнительных сотрудников.

Условные данные в качестве примера приводятся в табл. 4 и табл. 5 соответственно.

Обозначим через *X* случайную величину, представляющую собой ежемесячный спрос, через $p(x)$ – вероятность спроса x, которая задается с помощью табл. 4 для $x = 4, 5, 6, \ldots 16$; для остальных значений *x* вероятность $p(x)$ равна нулю. Через *Y* обозначим случайную величину, представляющую собой ежемесячное предложение, через $q(y)$ – вероятность предложения *y* для $y = 0, 1, 2, \ldots 7$. Распределение вероятностей $q(y)$ задано табл. 5; для остальных значений *y* вероятности равны нулю.

Для конкретных значений *x* из *X* и *y* из *Y* издержки одного месяца в предположении, что число постоянных сотрудников, находящихся в распоряжении агентства ежемесячно, равно *S*, устанавливаются следующим образом:

$$\Gamma(S) = C_1 \cdot S, \text{ если } 0 \le x \le S$$

– дополнительных сотрудников не нужно;

$$\Gamma(S) = C_1 \cdot S + C_2 \cdot (x - S), \text{ если } 0 < x - S \le y$$

– нужны дополнительные сотрудники но нет необслуженных рекламных проектов;

$$\Gamma(S) = C_1 \cdot S + C_2 \cdot y + C_3 \cdot (x - S - y), \text{ если } y < x - S$$

– нужны дополнительные сотрудники и есть необслуженные рекламные проекты.

Таким образом, множество всех значений *X* и *Y* можно разбить на три области, соответствующие трем указанным выше ситуациям.

Чтобы получить математическое ожидание $\Gamma(S)$, которое обозначим через $M(\Gamma)$, нужно вычислить издержки для всех сочетаний значений *x* и *y*, а также умножить эти издержки на соответствующую вероятность $p(x) \cdot q(y)$, а затем просуммировать эти произведения по всем возможным сочетаниям значений *x* и *y*. Эти вычисления можно представить в виде формулы

$$M(\Gamma) = C_1 \cdot S + C_2 \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=S+1}^{S+y} (x - S) \cdot p(x) \cdot q(y) + \sum_{x=S+1}^{\infty} \sum_{y=0}^{x-S-1} \left[C_2 \cdot y + C_3 (x - S - y) \right] \cdot p(x) \cdot q(y) \quad (1)$$

В формуле (1) компонента $C_1 \cdot S$ – это затраты, соответствующие S постоянным сотрудникам, производящиеся с вероятностью 1. Величина

$$M_1(S) = C_2 \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=S+1}^{S+y} (x-S) \cdot p(x) \cdot q(y)$$

представляет собой сумму затрат на дополнительных сотрудников когда нет необслуженных рекламных проектов. Величина

$$M_2(S) = \sum_{x=S+1}^{\infty} \sum_{y=0}^{x-S-1} \left[C_2 \cdot y + C_3 \cdot (x-S-y)\right] \cdot p(x) \cdot q(y)$$

представляет собой сумму затрат на дополнительных сотрудников вместе с убытками от несостоявшихся рекламных проектов.

Продолжим рассмотрение численного примера. Условимся, что C_1 составляет 52 тыс. руб., C_2 равно 70 тыс. руб., C_3 равно 400 тыс. руб. Чтобы найти оптимальное значение $M(Г)$ вычислим эту величину для S = 4, 5, 6, …, 14, 15. Результаты приводятся в табл. 6.

Таблица 6

S	$C_1 \cdot S$ тыс. руб.	$M_1(S)$ тыс. руб.	$M_2(S)$ тыс. руб.	$M(Г)$ тыс. руб.
4	208	184,32	1402,24	1794,57
5	260	175,39	1082,33	1518,32
6	312	163,79	802,54	1278,33
7	364	147,11	566,32	1077,43
8	416	127,32	376,48	919,8
9	468	105,17	232,28	805,45
10	520	82,26	130,28	732,54
11	572	59,70	64,23	695,93
12	624	39,0	26,73	689,73
13	676	20,99	8,84	705,83
14	728	8,50	2,05	738,54
15	780	1,75	0,24	781,99

Данные табл. 6 показывают, что минимум средних затрат на содержание персонала рекламного агентства $M(Г)$ достигается при S = 12 постоянных сотрудников.

Величину $M(Г)$ можно представить как сумму монотонно возрастающей функции $C1 \cdot S$ и монотонно убывающей функции $M_1(S) + M_2(S)$. В такой ситуации существование минимума $M(Г)$ можно считать гарантированным.

В заключение следует отметить целесообразность изучения других оптимизационных задач, возникающих в практике деятельности рекламных агентств.

Литература

1. Романов А.А. «Теория и практика рекламных коммуникаций». Монография. Изд. центр ЕАОИ. – М.: 2011. – 512 с.

2. Егорова Е.А., Карманов М.В., Кучмаева О.В., Романов А.А., Смелов П.А. и др. Методологические вопросы мониторинга и прикладного анализа развития рекламного бизнеса. Коллективная монография. – М., МЭСИ, 2010 г., с. 240.

3. Смелов П.А., Карманов М.В., Егорова Е.А., Минашкин В.Г. и др. Методология статистических исследований социально-экономических процессов. Книга, посвященная 80-летию МЭСИ. – М., МЭСИ, 2012 г., с. 426.