ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ И ПРАВОВОЙ СФЕРЕ

УДК 330.45

Андрей Николаевич Ващекин,
к.э.н., доцент, профессор кафедры «Математического обеспечения информационных систем и инноватики»
Московский университет экономики, статистики и информатики
Тел.: 8 (495) 331-09-70
Эл. почта: Vaschekin@mail.ru

Математические модели, отражающие нечёткий характер взаимодействия различных субъектов в экономике и праве, позволяют решать сходными методами задачи изучения потенциальных партнёров на основе взаимодействия по договорам консигнации, вычисления перспективного ассортимента оптового предприятия, моделирования складских операций, ценообразования, оптимизации транспортных перевозок, вексельных схем, согласованности экспертных оценок в процессе кодификации и консолидации Законодательства.

Ключевые слова: математическая модель, экспертные оценки, нечеткая логика.

Andrey N. Vaschekin,
PhD, Associate professor, Professor, the Department of Mathematical support for informational systems and innovation studies, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics
Tel.: 8 (495) 331-09-70,
E-mail: Vaschekin@mail.ru

THE APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS IN THE THEORY OF FUZZY SETS IN MODELING DECISION-MAKING IN THE ECONOMIC AND LEGAL DEVELOPMENTS

Mathematical models that reflect the fuzzy nature of the interaction of various actors in the economy and law, allow us to solve by similar methods such problems as exploring potential partners based on the interaction of consignment contracts, long-term range calculation of wholesale companies, warehouse operations modeling, pricing, optimization of transportation, bills of exchange schemes, consistency, expert estimates in the process of codification and consolidation of the Legislation.

Keywords: mathematical model, expert evaluation, fuzzy logic.

1. Введение

Большинство людей судят о математике как о науке точной, решающей задачи о движениях небесных тел и железнодорожных составов, об объемах сложных геометрических фигур, о мощности энергетических установок электростанций и т.п. Это мнение складывается у них по воспоминаниям о задачах, которые решались ими в школе и начинались фразами типа: «из пункта А в пункт В выезжает поезд…», или «в равнобедренный треугольник вписан круг…».

Однако, современная математика позволяет решать задачи, связанные с субъективным восприятием, неоднозначной оценкой обстановки человеком и принятием решений в нечётких условиях. Ведь большинство категорий, которыми оперируют люди в реальной жизни, не измеряются четко. Они звучат как «ближе – дальше», «быстрее – медленнее», «нравится – не нравится».

Как показывает практика, этот подход применим для решения самых различных задач моделирования в экономике и юриспруденции. Он использует допущения нечёткого восприятия привлекательности торговых партнёров, расстояния, качества товаров, значимости юридических норм, важности аргументов. Говоря формальным языком, представления предпочтения в виде нечёткого множества.

Заметим, что вообще все процессы, осуществляемые или управляемые человеком, можно отнести к «нечётким», «размытым», «расплывчатым» процессам, поскольку человек, помимо способности рассуждать и логически мыслить, обладает способностью принимать в расчет параллельно соображения как общего, так и сопутствующего характера.

Даже простейшая задача выполнения коммерческой операции подсказывает необходимость обращения к нечётким методам. Скажем, нам необходимо описать процесс покупки в магазине отдельно взятым покупателем какого-либо товара (например, телевизора). У покупателя имеется определённая сумма денег, но это вовсе не означает, что он непременно возьмёт товар, совпадающий по цене с этой суммой. Скорее всего, он не имеет намерения потратить все свои деньги. Находясь в магазине, среди множества телевизоров различных форм, цветов, размеров произведённых в различных странах под разными марками, покупатель невольно решает для себя задачу учёта множества факторов: как купить телевизор престижной марки, с большой диагональю экрана, при этом не переплатив? Примиряя свои предпочтения по отношению к различным факторам, он наконец находит нужное ему решение.

2. Теории нечетких множеств как средство моделирования задач о принятии решений

Проблема объединения общего соображения и логического рассуждения получила разрешение с появлением теории нечётких множеств (fuzzy sets), предложенной профессором университета Беркли (Калифорния, США) Л. Заде [1] в 60-е годы прошлого века. Теория нечётких множеств позволила оперировать математически нечётким представлением понятий, имеющих качественные и субъективные характеристики.

В отличие от традиционной математики, требующей на каждом шаге моделирования точных и однозначных формулировок закономерностей, нечёткая логика стоит на совершенно ином уровне мышления, благодаря которому в процессе моделирования требуется определить лишь минимальный набор закономерностей. В пределе, при возрастании точности, нечёткая логика приходит к стандартной, булевой.

Значения, получаемые в результате нечётких измерений, во многом аналогичны распределениям теории вероятностей, но свободны от присущих последним недостатков: малое количество пригодных к анализу функций распределения, необходимость их принудительной нормализации, соблюдение требований аддитивности, трудность обоснования адекватности математической абстракции для описания поведения фактических величин. По сравнению с вероятностным методом нечёткий метод позволяет резко сократить объём производимых вычислений, что в свою очередь приводит к увеличению быстродействия нечётких систем.

Интуитивная простота нечёткой логики обеспечивает успешное её применение в различных системах контроля и анализа экономической и правовой информации, а теоретико-множественный подход позволяет учитывать социально-психологические и экономические переменные.

Фактором, определяющим необходимость использования экспертных оценок в практике разработки поведения экономической или правовой структуры, является также то, что во многих случаях руководитель или иное лицо, принимающее решения, не располагает в полном объёме необходимыми ему данными и связями между ними, то есть опять-таки действует в условиях неполной и неточной информации.

Выделяются следующие основные классификационные признаки способов формализации нечёткости:

– по виду представления нечёткой субъективной оценки какой-либо величины (нечёткого множества);

– по виду области значений функции принадлежности;

– по виду области определения функции принадлежности;

– по виду соответствия между областью определения и областью значений (однозначное, многозначное);

– по признаку однородности или неоднородности области значений функции принадлежности.

За последние годы теория Заде не только получила всеобщее признание, но и развилась в ряд самостоятельных научных направлений. В конце прошлого века нечёткий подход был применён к тем областям математики, в которых использовалась классическая бинарная логика и теория множеств, вследствие чего возникли: нечёткая топология, нечёткие алгебраические структуры (нечёткие группы, нечёткие векторные пространства), нечёткая арифметика, нечёткая теория меры. Активно развивались направления, связанные с изучением метрических пространств на основе триангулярных норм, проблемами стандартизации и аксиоматизации, концепцией нечёткого числа.

Теория нечётких множеств применяется в решении широкого круга практических задач в различных областях науки и практики, таких как: управление различными производственными процессами, медицинская диагностика, обеспечение научных исследований в химии и выработка рекомендаций по синтезу соединений, поиск полезных ископаемых, регулирование дорожного движения, управление транспортными средствами и сложными бытовыми приборами, криминалистика, оборонные комплексы, создание баз данных, разработка компьютерных технологий. В наибольшей степени в настоящее время развиваются исследования, связанные с моделированием принятия решения. В приложении к экономике это прежде всего задачи из финансовой сферы (моделирование поведения игрока на рынке ценных бумаг, инвестиционной активности и т. п.).

Сложились целые научные школы, основаниями которых послужили работы Л. Заде, Р. Беллмана, М. Герца, Д. Дюбуа и Х. Прада, Р. Ягера, Х. Циммермана и др. Литература, посвящённая нечётким множествам, насчитывает тысячи наименований. Заметное влияние на научные исследования в области нечётких множеств оказали труды российских ученых Д.А. Поспелова, А.П. Рыжова, А.Ф. Блишуна, С.А. Орловского, И.З. Батыршина, В.П. Бочарникова, А.В. Михалёва и др.

Математические модели, отражающие нечёткий характер взаимодействия различных субъектов в экономике и праве, позволяют решать сходными методами задачи изучения потенциальных партнёров на основе взаимодействия по договорам консигнации, вычисления перспективного ассортимента оптового предприятия [2], моделирования складских операций, ценообразования [3], оптимизации транспортных перевозок, вексельных схем [4], согласованности экспертных оценок в процессе кодификации и консолидации Законодательства [5] и др.

3. Задача о распределении судебных дел

Рассмотрим для примера, как с помощью нечеткой модели может быть решена задача распределения судебных дел в районном (городском) суде

Очевидно, что распределяя судебные дела, руководитель принимает решения, субъективно возможности и способности каждого судьи, степень его образованности, знакомства с предметной областью, практический жизненный опыт, те или иные черты характера, загруженность судьи в данный момент времени и т.д.

Дано:

$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – множество судебных дел, поступающих в некоторый суд для рассмотрения;

$Y = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$ – множество признаков, характеризующих судебные дела;

$Z = \{z_1, z_2, ..., z_m\}$ – множество судей этого суда.

Требуется распределить все судебные дела среди судей оптимальным образом, т.е. для каждого судьи z_j сформировать множество дел $M'_j = \{x_i\}$, так, чтобы выполнялись условия: $\bigcup_j M'_j = X$ и $\bigcap_j M'_j = \varnothing$.

В общем случае для каждой группы дел целесообразно подбирать свой уникальный набор признаков, но для простоты вычислений мы ограничимся лишь несколькими, наиболее общими. Очевидно, что каждому конкретному делу тот или иной признак будет присущ *в некоторой степени*.

Рассмотрим, к примеру, признак «краткость рассмотрения». При беглом знакомстве с делом эксперту (в нашем случае – руководителю суда) легко определить, какое из дел затянется надолго, а какое будет разрешено в короткие сроки. Это позволяет ему дать экспертную оценку значения функции принадлежности конкретного дела множеству длительных дел: если дело заведомо предполагает большую продолжительность процесса, то значение функции принадлежности будет близким к 0; если же дело, по всей видимости, будет коротким, то значение функции принадлежности окажется близким к 1.

Нетрудно также заметить, что не для всех судей каждый признак является важным (привлекательным) в равной степени. К примеру, для судьи, имеющего небольшой опыт работы, крайне важным должен быть признак «процессуальная простота», поскольку со сложным делом он вряд ли сможет справиться. Судебные дела четко делятся по категориям на уголовные, гражданские и административные. Однако, в соответствии с обстоятельствами правовой ситуации, многие дела, в особенности сложные, несут в себе нечеткие черты двух и даже всех трех этих категорий.

Итак, на начальном этапе руководителем суда проводится экспертная оценка, которая позволяет получить формализованное условие задачи.

Пусть $r : X \times Y \to [0, 1]$ – функция принадлежности нечёткого бинарного отношения R, задаваемая с помощью эксперта. Эта функция выражает, в какой степени конкретному делу x_i присущ признак y_j. Значения функции по конкретному x_i запишем в строку (получится строка из p элементов), расположим эти строки друг под другом (всего таких строк n штук.

Получаем представление отношения R в матричной форме:

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \dots & y_p \end{array} \\ \begin{bmatrix} r(x_1,y_1) & r(x_1,y_2) & \dots & r(x_1,y_p) \\ r(x_2,y_1) & r(x_2,y_2) & \dots & r(x_2,y_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(x_n,y_1) & r(x_n,y_2) & \dots & r(x_n,y_p) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Пусть $s : Y \times Z \to [0, 1]$ – функция принадлежности нечёткого бинарного отношения S. Для всех $y \in Y$ и всех $z \in Z \cdot s(y, z)$ равна степени важности с признака y_i для судьи z_j. В матричной форме это отношение имеет вид:

$$S = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \dots & z_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} s(y_1,z_1) & s(y_1,z_2) & \dots & s(y_1,z_m) \\ s(y_2,z_1) & s(y_2,z_2) & \dots & s(y_2,z_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s(y_p,z_1) & s(y_p,z_2) & \dots & s(y_p,z_m) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Примечание 1: чтобы избежать излишней путаницы при решении задачи, в качестве y_1 эксперту всегда следует выбирать признак «краткость рассмотрения», а качестве y_2 – «процессуальная простота». При этом судей z_j желательно упорядочивать в множестве Z по убыванию степени важности для них признака y_1, а именно: чем более важен для судьи z этот признак, т.е. чем больше $s(y_1, z)$ тем больше его порядковый номер в множестве Z. Если для двух или более судей значения функции $s(y_1, z)$ равны, то эти судьи между собой упорядочиваются аналогичным образом по признаку y_2: чем больше $s(y_2, z)$, тем больше его порядковый номер в множестве Z.

Решение

Шаг 1. Из матриц R и S получаем матрицу T:

$$T = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \dots & z_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} t(x_1,z_1) & t(x_1,z_2) & \dots & t(x_1,z_m) \\ t(x_2,z_1) & t(x_2,z_2) & \dots & t(x_2,z_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t(x_n,z_1) & t(x_n,z_2) & \dots & t(x_n,z_m) \end{bmatrix} \end{array},$$

элементы которой вычисляются по формуле: $t(x, z_i) = \dfrac{\sum_y r(x,y) \cdot s(y,z_i)}{\sum_y r(x,y)}$,

для всех $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. Фактически в этой формуле в числителе стоит число, которое получилось бы при нахождении произведения матриц $R \cdot S$, а в знаменателе – сумма элементов соответствующей строки матрицы R.

Шаг 2. Строим матрицу попарных минимумов:

$$L = \begin{pmatrix} \min(t(x_1,z_1), t(x_1,z_2)) & \dots & \min(t(x_1,z_{m-1}), t(x_1,z_m)) \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ \min(t(x_n,z_1), t(x_n,z_2)) & \dots & \min(t(x_n,z_{m-1}). t(x_n,z_m)) \end{pmatrix}$$

Шаг 3. В каждом столбце матрицы L, полученной на предыдущем шаге, находим максимальный элемент.

Шаг 4. Из чисел, полученных на предыдущем шаге, находим минимальное.

Шаг 5. В матрице T, полученной нами на первом шаге, находим элемент, чуть меньший, чем число, которое мы получили четвертом шаге. Обозначаем его буквой l и называем пороговым числом.

Наши действия со второго по пятый шаг можно формально записать следующим образом:

$$l \langle \min_{i,j} \max_x \min(t(x, z_i), t(x, z_j)).$$

Шаг 6. Для каждого судьи z_j получаем множество предпочтений M_j, элементами которого являются дела, x_i которые могут быть распределены этому судье. Рассматриваем поочередно столбцы матрицы T. Если элемент $t(x_i, z_j)$ больше или равен l, то дело x_i входит в множество M_j.

Таким образом, $M_j = \{x | t(x) \geq l\}$.

Заметим, что множества M_j могут пересекаться между собой, а их объединение не обязательно составит все множество X.

Примечание 2: если после выполнения шестого шага оказалось, что какие-либо дела x_i не вошли ни в одно из множеств предпочтений M_j, формируем из этих «непривлекательных» дел множество M_{m+1}.

Шаг 7. Формируем множества M'_j – множества дел, которые будут распределены судье z_j. На момент начала выполнения шага 7 все эти множества пусты. При окончательном распределении судебных дел руководствуемся принципом сочетания возможности и желаемости. Для этого выбираем множество предпочтений наименее загруженного на данный момент судьи (в соответствии с Примечанием 1 это будет судья z_1). В множестве предпочтений M_1 выбираем такое дело x_1, которое вошло в него с наибольшим абсолютным показателем, т.е. с наибольшим значением $t(x_1, z_1)$. Это дело распределяется судье z_1, т.е. добавляется в множество M'_1 и удаляется из всех множеств M_j. Далее ту же операцию проделываем с M_2, и со всеми остальными множествами предпочтений по кругу, пока все дела не будут распределены.

После выполнения этого шага ни в одной паре множеств M'_j не найдётся двух одинаковых элементов, а множества M_j станут пустыми для всех $j \leq m$.

Если в соответствии с Примечанием 2 было сформировано множество «непривлекательных» дел M_{m+1}, то придется выполнить еще один шаг, в принципе аналогичный предыдущему.

Шаг 8. В множестве предпочтений M_{m+1} выбираем такое дело x_i, которое вошло в него с наибольшим абсолютным показателем для судьи z_1, т.е. с наибольшим значением $t(x_i, z_1)$. Это дело распределяется судье z_1, т.е. добавляется в множество M'_1, и удаляется из множества M_{m+1}. Далее ту же операцию проделываем с судьей z_2, и со всеми остальными судьями по кругу, пока множество M_{m+1} не станет пустым.

Заключение

Решение задачи, как видим, помогает руководителю оптимально распределить дела между судьями в соответствии с принципом сочетания возможности и желаемости, комплексно учесть их знания и опыт, а также снизить загруженность.

Литература

1. Zadeh L. Fuzzy Sets. – Information & Control, Iss. 8, 1965, P. 338–353.

2. Ващекин А.Н. Математическое моделирование коммерческой деятельности оптового торгового предприятия. Монография. – М., изд-во МГУК, 2002, 206 с.

3. Ващекин А.Н. Моделирование и выбор рациональных стратегий коммерческой деятельности предприятий оптовой торговли. Монография. –М.: изд-во ВЗФЭИ, 2004, 194 с.

4. Ващекин А.Н., Ващекина И.В. Применение вексельных схем для ре-

ализации отраслевой государственной поддержки. Математическая модель. // Вестник Российского государственного торгово-экономического университета. – №10, 2010 – С. 62–71.

5. Ващекин А.Н. Оценка согласованности нормативно-правовых актов в процессе консолидации и кодификации законодательства. // Информационные отношения и право. Сб. научных трудов. – вып. 2, 2007 – С. 51–58.

References

1. Zadeh L. Fuzzy Sets. – Information & Control, Iss. 8, 1965. P. 338–353.

2. Vaschekin A.N. Mathematical modeling of wholesale trade enterprise commercial activity. Monograph. – M., MGUK, 2002, 206 s.

3. Vaschekin A.N. Modeling and choice of sustainable strategy for wholesale trade enterprise. Monograph. – M.: VZFEI, 2004, 194 s.

4. Vaschekin A.N., Vaschekina I.V. Bill schemes implementation for sectoral state support. // Vestnik Rossiyskogo gosudarstvennogo torgovo-economicheskogo universiteta. – №10, 2010 – S. 62–71.

5. Vaschekin A.N. Estimation of laws and regulations ensemble in the process of laws consolidation and codification. // Informacionnye otnoshenia I pravo. Sb. nauchnyh trudov. – vyp. 2, 2007 – S. 51–58.