

О комбинациях гармоник и полиномов в эконометрическом моделировании курсовых изменений RUB/AZN

Проведение комбинационного полиномиального и спектрального анализа временных рядов, сформированных на основе ежедневных наблюдений за изменениями курса RUB/AZN с выраженными колебаниями за период 11.05.2017-02.11.2018 на основе компьютерного эконометрического моделирования.

Цель исследования. Возможность описания глобальной динамики курса аппроксимацией с сочетанием нелинейного полиномиального тренда и гармонических колебаний различных частот относительно этой кривой; возможность вычисления амплитуд и фаз, которые можно использовать для оценок спектра мощности аппроксимации Фурье; возможность выработки высокоточного алгоритма для прогнозирования курсовых изменений RUB/AZN.

Материалы и методология. Использованы официальные статистические данные госкомстата Азербайджана; классические методы математического анализа и экономического анализа; применены методы эконометрики, гармонического (Фурье) анализа, статистического спектрального анализа, «Анализ Фурье» надстройкой MS Excel, инструменты пакета прикладных программ EvIEWS 8 с учетом показателей среднеквадратичного отклонения и средней ошибки аппроксимации, необходимые статистические процедуры, требуемые для идентификации и оценки параметров модели и проверки ее адекватности и точности.

Результаты. Разбивая эмпирический анализ заданных временных рядов на полиномиальные по временной шкале и частотно-временные компоненты. Выявлены комбинации оптимальной степени вариантов полиномов до 11-ой степени и число гармоник синусов и косинусов всех возможных дискретных частот.

Заключение. Этот результат позволяет пересмотреть асимметрическое воздействие давления курса RUB/AZN на внешнеторговый баланс между Россией и Азербайджаном. Увеличение/уменьшение давления курса влияет на вероятность кризиса рубля-маната, в то время как это явление может отрицательно/положительно повлиять на внешнеторговый баланс и может затруднить/облегчить импортные ресурсы, товаров и услуг между странами. Это в свою очередь делает основательной задачу дальнейшего детального структурирования и анализа курсовых изменений RUB/AZN в условиях усиленных санкционных давлений против России, тем самым актуализируя развитие ретроспективной части исследования.

Ключевые слова: временные ряды, коэффициенты Фурье, гармонический анализ, полиномиальный тренд, прогнозирование.

Leyla M. Mamedova

Baku State University, Baku, Azerbaijan

On the Combination of Harmonics and Polynoms in Econometric Modeling of RUB/AZN Exchange Rate

Conducting a combinational polynomial and spectral analysis of time series formed on the basis of daily observations of changes in the RUB/AZN exchange rate with pronounced fluctuations for the period 11.05.2017- 02.11.2018 based on computer econometric modeling.

The purpose of the research. The possibility of describing the global rate dynamics by approximation with a combination of a nonlinear polynomial trend and harmonic oscillations of various frequencies relative to this curve; the ability to calculate amplitudes and phases, which can be used to estimate the power spectrum of the Fourier approximation; the ability to develop a high-precision algorithm for predicting exchange rate changes in RUB/AZN.

Materials and methodology. The official statistics of the State Statistics Committee of Azerbaijan were used; classical methods of mathematical analysis and economic analysis; methods of econometrics, harmonic (Fourier) analysis, statistical spectral analysis, "Fourier analysis" of the MS Excel add-in, tools of the EvIEWS 8 application package with the standard deviation and average approximation error being taken into account, the necessary statistical procedures required for identifying and estimating the parameters of the model and checking its adequacy and accuracy.

Results. By breaking up the empirical analysis of given time series into time-scale polynomial and time-frequency components. Combinations of the optimal degree of variants of polynomials up to the 11th degree and the number of harmonics of sines and cosines of all possible discrete frequencies were revealed.

Conclusion. This result allows us to reconsider the asymmetric impact of RUB/AZN exchange rate pressure on the foreign trade balance between Russia and Azerbaijan. An increase/decrease in exchange rate pressure affects the likelihood of a ruble-manat crisis, while this phenomenon may negatively/positively affect the foreign trade balance and may make it difficult/easier to import resources, goods and services between countries. This, in turn, adds significance to the task of further detailed structuring and analysis of exchange rate changes in RUB/AZN in the face of increased sanction pressures against Russia, thereby actualizing the development of the retrospective part of the study.

Keywords: time series, Fourier coefficients, harmonic analysis, polynomial trend, forecasting.

Введение и цель работы

Результаты анализа курсовых изменений RUB/AZN особенно актуальны для двух граничащих стран России и Азербайджана, заключивших стратегическое партнерство. В связи с санкциями европейских стран и США против России и с учетом исторического ретроспектива информации о закономерностях динамики, возможна выработка необходимых экстренных решений для улучшения асимметричных воздействий давления данного курса на внешнеторговый баланс между этими странами, с целью уменьшения до возможного минимума вероятности кризиса рубля-маната. В связи с чем возникает необходимость применения метода смешанного гармоническо-полиномиального анализа соответствующих временных рядов, преобладающего эффективными количественными оценками распределения дисперсии данных по подобластям пространственных частот над методами линейного и нелинейного регрессионного анализа с регрессорами времени, методами авторегрессии, Вейвлет анализа, кусочно-линейных и кусочно-нелинейных методов.

В этой работе рассматривается временной ряд, взятый из определенного временного интервала, на примере курса RUB/AZN. В целях повышения точности аппроксимации и исключения амплитуд из заданного конечного диапазона методом построения полигармонических моделей проводится сравнительный статистический анализ. С 11.05.2017 г. по 02.11.2018 г. были изучены процедуры выбора гармоник и определения степени полинома как оптимальной модели с учетом средних показателей квадратичного отклонения и средней ошибки аппроксимации из построенных полиномиальных моделей периодического характера-гармоник, описывающих поведение временных рядов курсовых изменений RUB/AZN на отрезке времени, где прямая и полином высокой степени являются трендовыми, а также проводится анализ, позволяющий рассчитать оптимальную прогнозную оценку на основе частотных представлений соответствующего временного ряда, на базе модели с синусной и косинусной аддитивной структурой.

Причина выбора этого интервала связана с тем, что предварительный анализ описательной статистики полинома выше первой степени периода 2017–2021 годов показывает в этом подинтервале выраженные колебания курса относительно полинома выше первой степени с многочисленными структурными сдвигами типа наклона и крутизны [12], что затрудняет определение эффективности введения в модель многочисленных фиктивных переменных. В этой статье используется статистический спектральный

подход [11] анализа временных рядов, основанный на аппроксимации Фурье, для выявления структурных разрывов. Основная идея среди различных комбинаций построенного здесь нелинейного полиномиальной и гармонической комбинированной модели состоит в том, чтобы сделать прогноз более эффективным за счет преимуществ отдельных моделей. И, в связи с этим, обменный курс RUB/AZN используется в качестве эмпирического анализа эффективной оценки нелинейной комбинированной модели.

Анализ последних публикаций

Существует большое количество исследований, посвященных спектральному анализу финансово-экономических временных рядов и их непрерывных аналогов. Таким образом, в литературе [1–7, 10, 11] приведены теоретические основы классического математико-статистического методологического спектрального анализа временных рядов.

Для непрерывных аналогов спектрального анализа отметим, что обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка [6, 10] могут быть представлены в виде системы из n дифференциальных уравнений первого порядка. Фазовым пространством такой системы является n -мерное евклидово пространство. Каждому мгновенному состоянию системы отвечает фазовая точка этого пространства, и каждой точке пространства соответствует определенное единственное состояние системы. Динамику можно представить как последовательное изменение положения фазовых точек, т.е. траектории движения этих точек в фазовом пространстве. Поведению исходного процесса будут отвечать решения n обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующая фазовая траектория. Если удастся представить $Y(t) = y(t) + \varepsilon(t)$, где $Y(t)$ — наблюдаемое значение временного ряда в момент времени t , $\varepsilon(t)$ — белый шум с нулевой средней и конечной дисперсией, $y(t)$ — математическое ожидание исследуемой величины в момент времени t , тогда для прогнозирования соответствующего ряда можно оценить соответствующие параметры в общем решении дифференциального уравнения. Поскольку случайный аддитивный член $\varepsilon(t)$ является белым шумом, оценку параметров можно производить методом наименьших квадратов [13].

В [9] приведены дифференциальные характеристики колебаний курсов на финансовом рынке, исследовано решение задачи Коши для корреляционной функции. На сегодняшний день количество опубликованных работ эмпирического анализа временных рядов, содержащих периодические колебания, незначительное. В частности, в работе [5] построена модель таких рядов с малым числом гармоник в табличном

редакторе MS Excel. Однако в исследованиях в основном изучались модели распределения по малым гармоникам, что не только снижает точность аппроксимации, но и приводит к ряду неопределенностей относительно распределения дисперсии по малым и высоким гармоническим частотам. Изучение регуляционных и нерегулярных периодов возрастания и убывания, определение спектральных пик, выделение строгих гармоник [14] и их периодической оценки с учетом спектра соответствующих частот, изучение доли этих гармоник в общей дисперсии динамических изменений курса, а также процесса формирования курса для прослеживания тенденций и контроля экспортно-импортных операций между этими странами, соответствующих регулирующих структур государственного управления, имеет важное значение. Эконометрическую модель можно проанализировать с помощью тригонометрического порядка Фурье, выраженного синусоидальными функциями, в то время как ряды временного порядка являются периодическими. Разделительный гармонический (спектральный) анализ тригонометрического ряда Фурье называется так потому, что аналитическая форма таких схем выглядит следующим образом:

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (t = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

где $\hat{y}_t$ — оценка трендовой функции в момент времени t исследуемой модели, построенной в соответствии со спектральным анализом, k — порядковый номер гармоник (периода) ряда Фурье, m — число гармоник (периодов), n — общее число показателей, t — момент времени, которое принимает значения $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{2 \cdot 2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)2\pi}{n}$.

Параметры, указанные в модели (1), можно вычислить, с помощью МНК (метода наименьших квадратов). При применении этого метода получается система нормальных уравнений с числом $2(m+1)$, из которой путем простых математических вычислений получаются следующие формы выражения оценок:

$$a_0 = \bar{y}_t \quad (t = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n y_t \cdot \cos kt \quad \left(k = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} \right) \quad (3)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n y_t \cdot \sin kt \quad \left(k = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} \right). \quad (4)$$

После оценки параметров определяется на какой гармонике лучше описать периодическое изменение временного ряда. Увеличение числа гармоник улучшает повышение точности аппроксимации, но в этом случае значения квадратичного отклонения может возрасти. Уве-

личение квадратичного отклонения снижает значимость модели.

Среднеквадратичное отклонение используется для обозначения степени отклонения наблюдаемого показателя от среднего показателя. При меньшей мере ошибки аппроксимации и среднеквадратичное отклонения в соответствии с заданным порядком, построенная модель будет более адекватной. Среднее квадратичное отклонение рассчитывается по формуле:

$$\sigma_{y_t} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{n - m}}. \quad (5)$$

Средняя ошибка аппроксимации же

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \cdot 100\% \quad (6)$$

определяется этой формулой.

Основную формулу расчета спектрального анализа также можно записать следующим образом:

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{k=1}^n c_k (\cos kt + \varphi_k) \quad (7)$$

или

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{k=1}^n c_k (\sin kt + \varphi_k). \quad (8)$$

где c_k — амплитуда построенной модели, φ_k — фаза модели.

Амплитуда

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad (9)$$

фаза:

$$\varphi_k = \arctg \left(-\frac{b_k}{a_k} \right) \quad (10)$$

рассчитываются по формуле.

При этом спектром называется совокупность интенсивности простых колебаний. Спектр можно определить как разложение дисперсии ряда по частотам для определения значений гармоник. А дисперсия ряда равна сумме всех гармоник ее спектрального разложения. Шаг, определенный между соседними простыми колебаниями, равный некоторой конечной величине, будет дискретным спектром.

Построенный с помощью амплитудно-спектрального анализа используется в качестве инструмента для определения того, на каком расстоянии график модели, находится от оси t (абсцисс).

Распределение амплитуды гармонического состава временного ряда по частотам — это амплитудный спектр, а соответствующего распределения — фазовый спектр.

Здесь можно было рассмотреть почти периодические Фурье разложение [8] по $\sin \alpha_n t$, $\cos \alpha_n t$, где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$. При этом если $\alpha_r, \alpha_s \in G\alpha = \{\alpha_n\}$, то $\alpha_r + \alpha_s \in G\alpha$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$.

Для почти периодических процессов в представлениях (1), (3), (4), (7), (8) $\cos kt$, $\sin kt$ следует поменять на $\sin \alpha_n t$, $\cos \alpha_n t$.

Число $\tau = \tau_y(\varepsilon)$ называется почти-периодом процесса y_t с точностью ε , если для любого $t \in (0, \infty)$ имеет место неравенство $|y_{t+\tau} - y_t| < \varepsilon$. Каждый процесс y_t , допускающий равномерную аппроксимацию конечными тригонометрическими полиномами, является почти-периодическим.

В тригонометрическом представлении

$$y_t = \sum_1^n A_k e^{i\alpha_k t}, \quad (11)$$

где i — мнимое комплексное число, числа α_k являются спектром процесса y_t и A_k , определяемое формулой:

$$A_k = M\{y_t e^{-i\alpha_k t}\}, k = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

(M обозначает конечное среднее значение), будут коэффициентами Фурье. Здесь выражение под фигурной скобкой означает скалярное произведение y_t и $e^{i\alpha_k t}$ в пространстве почти периодических функций, определяемое формулой:

$$(y_t, e^{i\alpha_k t}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T Y_t e^{i\alpha_k t} dt. \quad (13)$$

Для нашего случая:

$$\begin{aligned} M\left\{\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i(\lambda_k - \lambda_s)t}\right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k M\{e^{i(\lambda_k - \lambda_s)t}\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\lambda_k - \lambda_s)t} dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lim_{T \rightarrow \infty} \begin{cases} (\lambda_k - \lambda_s)^{-1} e^{i(\lambda_k - \lambda_s)T}, & \text{если } k \neq s \\ T, & \text{если } k = s \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq s \\ A_k, & \text{если } k = s, \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

А для непрерывного чисто периодического процесса ряд Фурье почти периодического процесса совпадает с его обычным рядом Фурье (1). Всякая почти периодическая функция допускает равномерную аппроксимацию тригонометрическими полиномами с любой степенью точности. Располагая значения коэффициентов Фурье можно образовывать почти периодическую аппроксимирующую функцию с деформированным графиком, похожим на плавный и симметричный график простых гармоник. Поэтому здесь нам достаточно будет разложения аппроксимирующей функции в тригонометрический ряд основного периода 2π , с простой структуры (1).

Основные результаты исследования

Для построения модели спектрального анализа курса RUB/AZN, сперва изучим одну гармонику, то есть случай $m = 1$. С помощью пане-

ли инструментов программы MS EXCEL можно получить динамику движения и сглаживания кривой, изображенную на рис. 1.

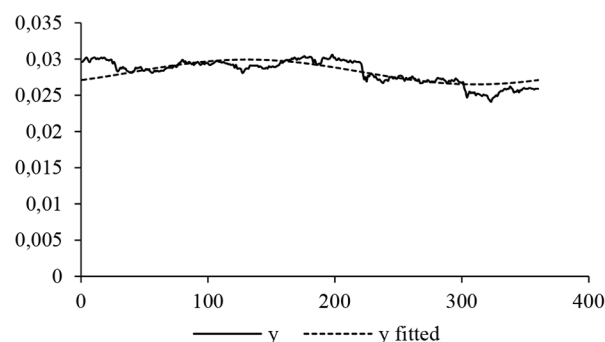


Рис. 1. Изменения курса RUB/AZN на основе динамики движения одной гармоники и сглаживания кривой

Fig. 1. Changes in the RUB/AZN exchange rate based on the dynamics of the movement of one harmonic and smoothing the curve

Согласно графическому изображению аналитическая форма трендовой функции

$$\hat{y}_t = 0,0282 - 0,0011 \cos t + 0,0013 \sin t \quad (15)$$

будет иметь вышеотмеченную формулу.

Среднее квадратичное отклонение модели будет составлять $\sigma = 0,001051$, когда средняя ошибка аппроксимации $\bar{\varepsilon} = 2,851\%$.

Теперь рассмотрим модель с двумя гармониками, то есть $m = 2$. Соответствующие алгоритмические процедуры выполняются при помощи программного пакета EXCEL, благодаря чему получается динамическое описание, аналогичное описанию рис. 2.

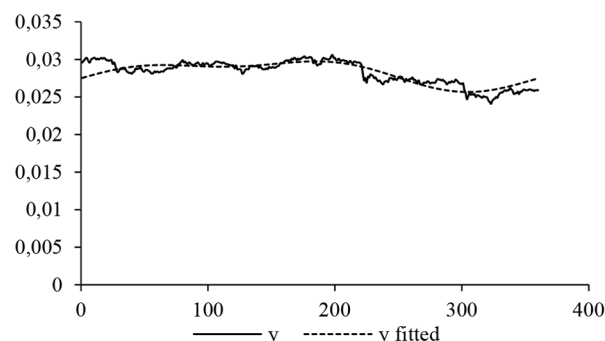


Рис. 2. Изменения курса RUB/AZN, на основе динамики движения 2 гармоник и сглаживания кривой

Fig. 2. Changes in the RUB/AZN exchange rate, based on the dynamics of the movement of two harmonics and curve smoothing

Тригонометрическая форма тренда модели будет составлять:

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= 0,0282 - 0,0011 \cos t + 0,0013 \sin t + \\ &+ 0,0004 \cos 2t + 0,0008 \sin 2t \end{aligned} \quad (16)$$

Его среднее квадратичное отклонение будет равно $\sigma = 0,000858$, когда средняя ошибка аппроксимации $\bar{\varepsilon} = 2,4553\%$.

Рассмотрим модель трех гармоник: по тому же правилу берется динамика движения, заданная на рис. 3.

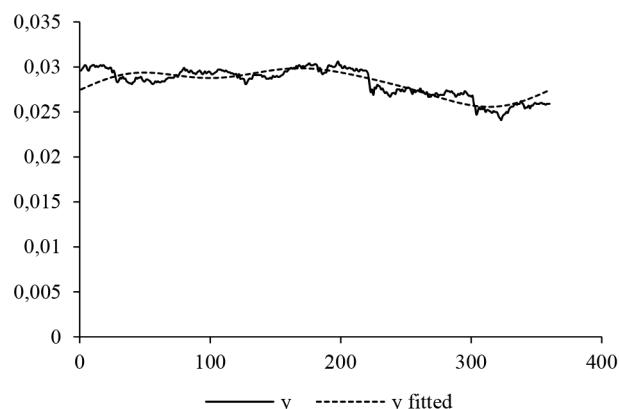


Рис. 3. Изменения курса RUB/AZN, на основе динамики движения 3 гармоник и сглаживания кривой

Fig. 3. Changes in the RUB/AZN exchange rate, based on the dynamics of the movement of three harmonics and curve smoothing

Аналитическая форма модели выражена посредством нижеописанного тригонометрического выражения:

$$\hat{y}_t = 0,0282 - 0,0011 \cos t + 0,0013 \sin t + 0,0004 \cos 2t + 0,0008 \sin 2t - 0,0001 \cos 3t + 0,0003 \sin 3t \quad (17)$$

Его среднее квадратичное отклонение равно $\sigma = 0,000829$, а средняя ошибка аппроксимации $\bar{\varepsilon} = 2,44519\%$.

Анализ каждой из 3 рассмотренных моделей показывает, что при увеличении гармоник уменьшается как среднее квадратичное отклонение, так и средняя ошибка аппроксимации. Наиболее точной моделью для заданного диапазона будет модель, построенная на оценке, по которой отметки этих показателей наиболее близки к 0.

На основании исследований было установлено, что наиболее точной моделью для этого ряда может быть модель гармоник 180. Для проверки утверждения, рассмотрим модели гармоник $m = 178, 179, 180, 181$ и 182 . Соответствующие средние квадратичные отклонения будут равны $\sigma = 0,000016$, $\sigma = 0,00000472$, $\sigma = 0,0000475$, $\sigma = 0,0000159$, $\sigma = 0,0000164$, когда средние ошибки аппроксимации, соответственно примут значения $\bar{\varepsilon} = 0,049378\%$, $\bar{\varepsilon} = 0,016748\%$, $\bar{\varepsilon} = 0,016849\%$, $\bar{\varepsilon} = 0,049259\%$, $\bar{\varepsilon} = 0,052335\%$.

Сравнительный анализ показывает, что в моделях гармоник 179, 180 и 181 как среднее квадратическое отклонение, так и коэффициент аппроксимации получают оценки, очень близкие друг к другу. Таким образом, как среднееква-

дратичное отклонение модели гармоник 179, так и средняя ошибка аппроксимации меньше, чем среднее квадратичное отклонение модели гармоник 180 и 181 и средняя ошибка аппроксимации. Если обратить внимание на показатели модели гармоник 182, то можно увидеть, что среднее квадратичное отклонение этой модели и средняя ошибка аппроксимации больше показателей других моделей. Поскольку дальнейшее увеличение числа гармоник приводит к среднеекватическому отклонению и увеличению средней ошибки аппроксимации, в качестве наиболее точной модели можно принять модель 179 гармоник.

Аналитическая форма модели, которую мы принимаем в качестве конечного результата курса RUB/AZN, будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{y}_t = & 0,0282 - 0,0011 \cos t + 0,0013 \sin t + \\ & + 0,0004 \cos 2t + 0,0008 \sin 2t - 0,0001 \cos 3t + \\ & + 0,0003 \sin 3t + \dots - 0,0000056 \cos 178t + \\ & + 0,00000258 \sin 178t - 0,0000021 \cos 179t - \\ & - 0,0000021 \sin 179t \end{aligned} \quad (18)$$

Остаточные пределы построенной модели изображены на рис. 4:

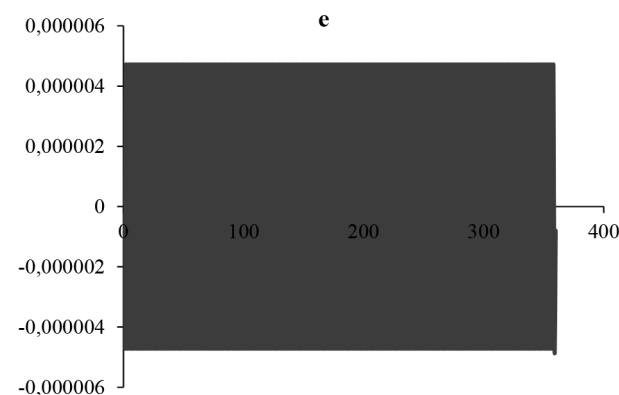


Рис. 4. Остаточные компоненты построенной (18) модели

Fig. 4. Residual components of the constructed (18) model

Как видно из рисунка, остаточные компоненты построенной модели стационарны вокруг оси 0. Следовательно, мы получили первоначальную информацию о том, что строящаяся модель, может включать изучаемую впоследствии модель. А теперь обратим внимание на некоторые показатели. Амплитуда и фаза модели, построенные на базе подхода спектрального анализа, должны быть рассчитаны отдельно для каждой гармоник. Так как построенная модель имеет 179 гармоник, соответственно 179 единиц амплитуд и фаз. В результате расчетов наибольшая оценка амплитуды составила $\max c_k = 0,098$, а наименьшая оценка $\min c_k = 0,0000784$, наибольшая оценка фазы: $\max \varphi_k = 1,555 \text{rad}$, а наименьшая же оценка $\varphi_k = -1,558 \text{rad}$.

Проверка статистической значимости построенной модели

Рассмотрим вопрос о проверке значимости построенной модели. В целом оценкой значимости уравнения регрессии является соответствие математической модели, описывающей зависимость между переменными, экспериментальным данным, определение вопросов о том, достаточно ли для описания объясняемой переменной числа объясняющих переменных, входящих в уравнение. Проверка значимости уравнения регрессии проводится на основе дисперсионного анализа.

В целях проверки значимости построенной модели на основе валютного курса, рассмотрим применение теста F -Фишера. Значимость модели, являющейся результатом подсчетов с помощью теста F -Фишера, имеющего критическое значение и соответствующее статистике F -Фишера, считается правильным для решений, т. е. $F_{\text{расчетный}} > F_{\text{таблица}}$. Для определения критической табличной оценки теста F -Фишера, необходимо установить уровень значимости (вероятности или процента) и степень свободы. Для проверки значимости модели рассмотрим 5% и 10% уровни значимости. А степени свободы теста определим в следующих заданных условиях, исходя из количества гармоник и наблюдений, т. е. $k_1 = m$, $k_2 = n - m - 1$. Ввиду 358 параметров $m = 358$, имеющей 179 гармоник модели, в соответствии с количеством гармоник и наблюдений, будет $n = 360$ соответственно, $k_1 = 360$, $k_2 = 360 - 358 - 1 = 1$. Исходя из отмеченных степеней свободы оценка критической таблицы F -Фишера в 5-ти % уровни значимости будет составлять $F_{0,05;358;1} = 253,7$, тогда как в 10% степени значимости будет равносильно $F_{0,1;358;1} = 63,31$. Следовательно, для того, чтобы модель была значимой, она должна соответствовать неравенству при 5% уровни значимости $F_{\text{расчетный}} > 253,7$, при 10% уровни значимости $F_{\text{расчетный}} > 63,31$.

Определим фактическую и F расчетную оценку изменения курса RUB/AZN. Для этого сначала рассчитывались показатели дисперсионного анализа и по каждой составляющей (регрессионной, остаточной и общей) сумма квадратов составила: $Q_r = 2,433234$, $Q_e = 0,000104$, $Q = 2,433338$. В соответствии с суммой квадратов средние квадраты получают оценки: $S_r^2 = 0,006797$, $S_e^2 = 0,000104$. Наконец, с помощью расчета теста F -Фишера, нами будет получена оценка $F = 87,012$. При сравнении полученного результата с соответствующими табличными оценками, будет очевидно, что модель удовлетворяет условию значимости статистики F при 5% уровни значимости $87,012 < 253,7$, а при 10% степени значимости $87,012 > 63,31$, исходя из чего можно заключить, что модель удовлетворяет условию значимости только при 10% уровни значимости.

Рассмотрим неравенство $|t_{\text{расчетный}}| > t_{\text{таблица}}$ для проверки значимости модели по критерию

t -Студент. Здесь оценка $t_{\text{таблица}}$ определяется на основе степени свободы $df = n - m - 1$. Если $n = 360$, то $df = 360 - 358 - 1 = 1$. Согласно этому показателю критическая оценка таблицы, имеющая 5% значимость t -Студенту, будет составлять $t_{\text{таблица}} = 1,6314$. Следовательно, чтобы модель являлась значимой для каждой гармоники в отдельности, должно быть выполнено неравенство $|t_{\text{расчетный}}| > 1,6314$.

Теперь посчитаем оценку критерия t -Студент, в соответствии с параметрами модели. Отметим, что критерий t -Студент будет иметь расчетную оценку в количестве 360, поскольку он рассчитывается отдельно в соответствии с каждым параметром. Расчет был проведен с помощью программы Excel и относительно каждого параметра были сделаны соответствующие выводы. Среди полученных результатов самая большая оценка составляет $t_{\text{расчетный}}(\text{max}) = 0,03$, а наименьшая $t_{\text{расчетный}}(\text{min}) = -0,116$. При сравнении полученной оценки с табличной оценкой, очевидно следующее $0,03 < 1,6314$ и $|-0,116| < 1,6314$. Поскольку эти результаты не удовлетворяют условию неравенства, зафиксированному в 5%-ой степени значимости статистики t -Student, модель считается несущественной по всем параметрам в отдельности.

Кроме того, на основе коэффициента ранговой корреляции Спирмена рассчитан критерий t -Студент, результат которого составляет $t_{\text{расчетный}} = 172,75$.

При подведении итогов относительно результатов по обоим тестам, можно прийти к выводу, что влияние каждого параметра в отдельности на общий результат не является существенным. Это является очевидным, поскольку все факторные переменные $\sin kt$, $\cos kt$ являются ортогональными и коэффициенты корреляции между ними будут равны 0, то есть все они будут независимыми и их вклад в изменение результативной переменной будет суммироваться. Ввиду того, что распределение этих переменных не является нормальным, отбор значимых гармоник проводится на основе статистики Фишера и построенная модель по всей совокупности параметров считается значимой.

В целях проверки наличия автокорреляции, в первую очередь необходимо построить нулевую гипотезу. Гипотеза H_0 об отсутствии автокорреляции определяется на основе значения критической таблицы Дарбина-Уотсона, на основе на общего количества наблюдений $n = 360$ и переменных $m = 358$, мы находим $d_l = 1,33$ и $d_u = 1,8$. Для проверки автокорреляции построенной модели рассчитана значения d -статистики: $d = 3,97$. Поскольку для этого показателя выполняется двойное неравенство $4 - d_l < d < 4$, гипотеза H_0 отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_1 о существовании отрицательной автокорреляции.

С помощью инструментов компьютерного пакета EXCEL были проведены расчеты и получено $d = 3,97$ — означающее, что полученная значение, соответствует двойному неравенству $2,67 < 3,97 < 4$. Решение этого неравенства означает, что принятая гипотеза H_0 отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_1 о существовании отрицательной автокорреляции.

Получаем значение коэффициента детерминации построенной модели $R^2 = 0,999957$. Очевидно, что полученный результат очень близок к единице. Из чего можно сделать вывод, что построенная модель объясняет 99,9957% дисперсии изменения курса.

Стоит упомянуть, что, если модель не считается оптимальной для каждой гармоники в отдельности, она может считаться оптимальной моделью в целом. Основная причина, по которой модель не считается оптимальной относительно каждой гармоники, заключается в том, что рассматриваемый динамический ряд не является стационарным, а аналитическая форма имеет 179 гармоник, зависящих только от одного фактора времени. Модель не значима для каждого фактора в отдельности, не влияет на значимость общей модели, и модель считается оптимальной.

Прогнозирование изменения курса RUB/AZN на основе спектрального анализа

Для прогнозирования курсов RUB/AZN на основе спектрального анализа должны быть выполнены следующие процедуры:

- Построен тренд модели:

$$y_t = \hat{y}_t + e_t \quad (19)$$

Построена модель спектрального анализа остаточных компонентов:

$$e_t = a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + \dots + a_m \cos mt + b_m \sin mt \quad (20)$$

— Рассчитан общий элемент прогноза. Общий прогноз рассчитывается как сумма 2 приведенных компонентов прогноза.

Где y_t — реальные показатели, $\hat{y}_t$ — оценки, рассчитанные на основе уравнения регрессии, e_t — остаточные компоненты. Чтобы дать прогноз модели, мы получим $\hat{y}_t$ — расчетную оценку уравнения регрессии, используя как парную регрессию, так и полином n -й степени, как было упомянуто выше.

Рассчитаем прогнозную цену изменения курса RUB/AZN сначала на основе линейной регрессии. Результат полученного уравнения регрессии будет выглядеть следующим образом в табл. 1.

Подходящую аналитическую форму можно представить следующим образом:

$$\hat{y} = 0,030343 - 0,0000118t \quad (21)$$

(здесь t -фактор времени, и поскольку $n = 360$, то примет значение $t = 1,360$). На основе парной линейной регрессии получается кривые на рис. 5.

Вторая часть прогноза — это предоставление спектрального анализа остаточных пределов. Спектральный анализ остаточных пределов в качестве оптимальной модели мы можем принять модель, содержащую периоды до 179-й гармоники, так как и стандартное отклонение модели, и средняя ошибка аппроксимации выражена в наименьшей мере. Графическая форма модели выглядит следующим образом на рис. 6:

Теперь на основе полученных аналитических выражений двойной линейной регрессии возможно проведение расчёта. Из 15 уравнений $t = 361$ следует $\hat{y}_t = 0,026097$, $e_t = 0,000721$, соответственно оценка прогноза будет составлять $y_t = 0,026097 - 0,000721 = 0,025376$. Если учитывать,

Таблица 1 (Table 1)

Результаты уравнения регрессии Results of the regression equation

Зависимая переменная: Y				
Метод: Наименьших квадратов				
Дата: 03/27/19 Время: 18:39				
Выборка: 5/11/2017 5/05/2018				
Включенные наблюдения: 360				
Переменные	Коэффициенты	Стандартные ошибки	t-Статистика	Вероятности
C	0.030343	0.000110	276.4260	0.0000
T	-1.18E-05	5.27E-07	-22.31814	0.0000
Коэффициент детерминации	0.581824	Среднее арифметическое значение зависимой переменной		0.028220
Скорректированный коэффициент детерминации	0.580656	Стандартное среднее квадратическое отклонение зависимой переменной		0.001605
Стандартная ошибка регрессии	0.001039	Критерий Акаике		-10.89518
Сумма квадратов остатков	0.000387	Критерий Шварца		-10.87359
Значение функции максимального правдоподобия	1963.133	Критерий Ханнан-Куинн		-10.88660
F-статистика	498.0993	Статистика Дарбина-Уотсона		0.044159
Вероятность(F-статистика)	0.000000			

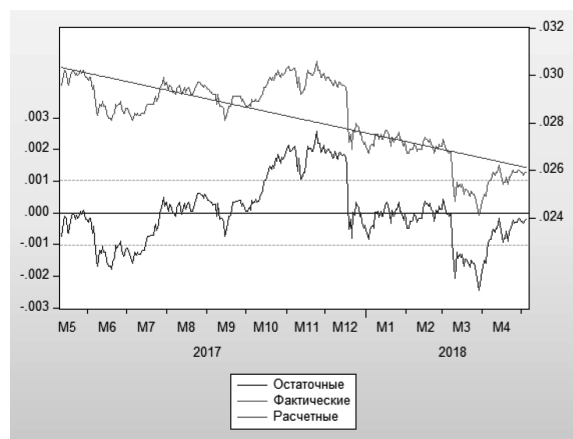


Рис. 5. Кривые, полученные на основе парной линейной регрессии

Figure 5. Paired Linear Regression Curves

что реальная оценка для $t = 361$ равна $y = 0,0259$, то ошибка прогноза будет равна $\bar{\varepsilon} = 0,000524$.

Мы видим незначительность прогнозной оценки, рассчитанной на основе двойной линейной регрессии. Однако, чтобы выяснить является ли эта ошибка еще меньше с полиномами n -й степени уравнения линейной регрессии, в следующем шаге нами будут использованы полиномы 2-й степени. Отметим, что в целом изучается полином n -й степени:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + a_n t^n, n \leq 11 \quad (22)$$

Рассмотрим реализацию полинома второго порядка при помощи инструментов программного пакета Eviews-8 в табл. 2.

Параметры полинома отмечены в нижней части раздела коэффициентов, в табл. 2. Графические изображения модели, полученные в результате реализации программного пакета Eviews-8, будут выглядеть следующим образом на рис. 7.

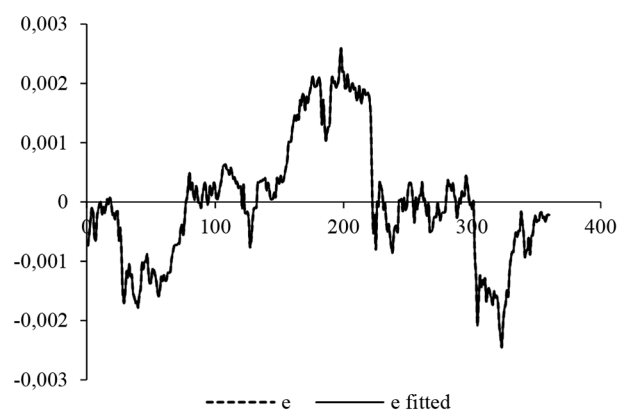


Рис. 6. Остаточные компоненты оптимальной модели

Figure 6. Residual components of the optimal model

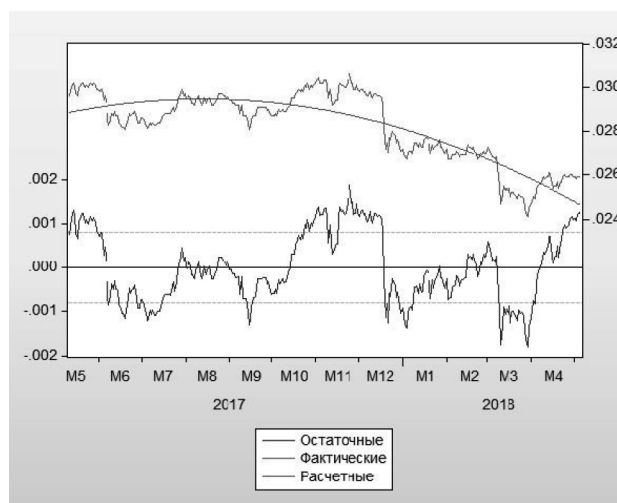


Рис. 7. Графическое представление результатов полиномиальной трендовой модели 2-го порядка

Figure 7. Graphical representation of the results of the 2nd order polynomial trend model

Таблица 2 (Table 2)

Результаты полинома второго порядка
Second order polynomial results

Зависимая переменная: Y				
Метод: Наименьших квадратов				
Дата : 03/27/19 Время: 19:16				
Образец: 5/11/2017 5/05/2018				
Включенные наблюдения: 360				
Переменные	Коэффициенты	Стандартные ошибки	t-статистика	Вероятность
C	0.028841	0.000127	227.6321	0.0000
T	1.31E-05	1.62E-06	8.111557	0.0000
T×2	-6.90E-08	4.35E-09	-15.87023	0.0000
Коэффициент детерминации	0.754808	Среднее арифметическое значение зависимой переменной		0.028220
Скорректированный коэффициент детерминации	0.753434	Стандартное среднее квадратическое отклонение зависимой переменной		0.001605
Стандартная ошибка регрессии	0.000797	Критерий Акаике		-11.42349
Сумма квадратов остатков	0.000227	Критерий Шварца		-11.39110
Значение функции максимального правдоподобия	2059.227	Критерий Ханнан-Куинн		-11.41061
F-статистика	549.5002	Статистика Дарбина-Уотсона		0.075430
Вероятность(F-статистика)	0.000000			

Графическая форма представления спектрального анализа остатков модели выглядит следующим образом на рис. 8:

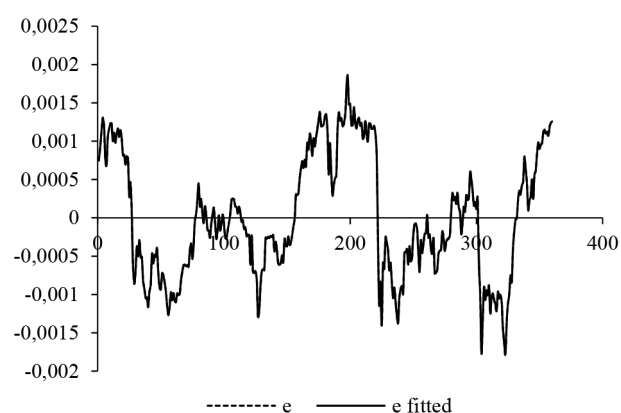


Рис. 8. Графическое изображение остатков полиномиальной трендовой модели 2-го порядка
Figure 8. Graphical representation of the residuals of the polynomial trend model of the 2nd order

Проведем расчет прогноза посредством полинома второй степени. По тому же правилу $t = 361$ для шага $\hat{e}_t = 0,024594$, $e_t = 0,000757$, а значит оценка прогноза составляет $y_t = 0,024594 + 0,000757 = 0,025351$. При условии, что реальная оценка для $T = 361$ составляет $y = 0,0259$, то можно обнаружить ошибку в прогнозе $\hat{e}_t = 0,000549$.

Здесь мы видим, что ошибка прогноза, рассчитанная параметрами парной линейной регрессии, получает значение меньше, чем ошибка прогноза, рассчитанная полиномом 2-й степени.

С помощью этого правила была рассчитана ошибка прогноза для каждого полинома, включая полином 11-й степени, следовательно полученные результаты внесены в ряд:

Для полинома 3-й степени ошибка прогноза составляет $\hat{e}_t = 0,0008$, для полинома 4-й степени $\hat{e}_t = 0,000711$, для полинома 5-й степени $\hat{e}_t = 0,000466$, 6-й степени $\hat{e}_t = 0,000471$, 7-й степени $\hat{e}_t = 0,000595$, 8-й степени $\hat{e}_t = 0,000528$, 9-й степени $\hat{e}_t = -0,00078$, 10-й степени $\hat{e}_t = -0,00023$, 11-й степени $\hat{e}_t = -0,00077$.

Отметим, что существование мультиколлинеарности было выявлено в результате вычисления полинома 11-й степени с помощью программного пакета Eviews 8. Следовательно, были рассчитаны показатели 11-го полинома с помощью программы MS Excel и сделаны соответствующие выводы.

Если обратить внимание на вышеупомянутые ошибки прогноза, то будет установлено, что наименьшая ошибка была получена в 10-м полиноме, в связи с чем прогнозную оценку этого полинома можно считать самой оптимальной. В общей сложности реализация 10-го полинома выглядит следующим образом в табл. 3:

Таблица 3 (Table 3)

Результаты полинома 10-го порядка
Results of the 10th order polynomial

Зависимая переменная: Y					
Метод: Наименьших квадратов					
Дата: 03/27/19 Время: 19:54					
Выборки : 5/11/2017 5/05/2018					
Включенные наблюдения: 360					
Переменные	Коэффициенты	Стандартные ошибки	t-статистика	Вероятность	
C	0.028198	0.000274	102.9003	0.0000	
T	0.000576	5.15E-05	11.18731	0.0000	
T×2	-4.60E-05	3.18E-06	-14.43176	0.0000	
T×3	1.46E-06	9.20E-08	15.85353	0.0000	
T×4	-2.42E-08	1.47E-09	-16.50425	0.0000	
T×5	2.36E-10	1.41E-11	16.76630	0.0000	
T×6	-1.42E-12	8.45E-14	-16.79882	0.0000	
T×7	5.33E-15	3.20E-16	16.68499	0.0000	
T×8	-1.22E-17	7.40E-19	-16.47697	0.0000	
T×9	1.55E-20	9.58E-22	16.20964	0.0000	
T×10	-8.43E-24	5.30E-25	-15.90642	0.0000	
Коэффициент детерминации	0.928883	Среднее арифметическое значение зависимой переменной			0.028220
Скорректированный Коэффициент детерминации	0.926845	Стандартное среднее квадратическое отклонение зависимой переменной			0.001605
Стандартная ошибка регрессии	0.000434	Критерий Акаике			-12.61676
Сумма квадратов остатков	6.58E-05	Критерий Шварца			-12.49801
Значение функции максимального правдоподобия	2282.016	Критерий Ханнан-Куинн			-12.56954
F-статистика	455.8406	Статистика Дарбина-Уотсона			0.258204
Вероятность (F-статистика)	0.000000				

Выводы

Анализ общих результатов модели показывает, что ежедневные показатели динамики курса RUB/AZN, охватывающие период с 11.05.2017 по 02.11.2018, приближаются к эмпирическому и статистическому спектральному анализу, коэффициент детерминации которого близок к единице (92,8883), а статистическая значимость оцениваемых параметров и динамического равновесия по времени, проверка адекватности модели статистическими тестами, считается наиболее оптимальной. Поэтому 179-гармоническая полиномиальная

модель 10-го порядка считается наиболее оптимальной моделью с учетом того, что ошибка прогноза имеет наименьшее значение по сравнению с другими аналогическими ошибками. Этот результат позволяет пересмотреть асимметрическое воздействие давления курса RUB/AZN на внешнеторговый баланс между Россией и Азербайджаном. Увеличение/уменьшение давления курса влияет на вероятность кризиса рубля-маната, в то время как это явление может отрицательно/положительно повлиять на внешнеторговый баланс и может затруднить/облегчить импортирование ресурсов, товаров и услуг между странами.

Литература

1. Гренджер К., Хатанака П. Спектральный анализ и его применение. М.: Статистика, 1972. 314 с.
2. Марпл С.Л. (мл.). Цифровой спектральный анализ и его приложения. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
3. Малоземов В.Н., Машарский С.М. Основы дискретно гармонического анализа. СПб.: НИИММ, 2003. 288 с.
4. Orudzhev E.G., Econometrics. Baku: AFPolygraph, 2018. 384 с.
5. Протасов Ю.М., Юров В.М. Гармонический анализ периодического колебания объемов продаж компаний на основе инструмента «Регрессия» MS EXCEL // Вестник МГОУ. Серия: Экономика. 2016. № 2. С. 115–121.
6. Obara T. Dynamics of exchange rate fluctuations between Yen and the US-Dollar // Applied Econometrics and International Development. 2004. № 4(1). С. 95–104.
7. Dolinar A. L. Spectral Analysis of Exchange Rates // International Journal of Organizational Leadership. 2013. № 2(1). С. 21–28.
8. Оруджев Э.Г. Исследование спектра одного класса дифференциального пучка с почти-периодическими коэффициентами // Доклады Академии Наук Азербайджана. 1999. № 1 (2). С. 27–31.

References

1. Grendzher K., Khatanaka P. Spektral'nyy analiz i yego primeneniye = Spectral analysis and its appli. Moscow: Statistics; 1972. 314 p. (In Russ.)
2. Marpl S.L. (ml.). Tsifrovoy spektral'nyy analiz i yego prilozheniya. Per. s angl. = Digital spectral analysis and its applications. Tr. from Eng. Moscow: Mir; 1990. 584 p. (In Russ.)
3. Malozemov V.N., Masharskiy S.M. Osnovy diskretno garmonicheskogo analiza = Fundamentals of discrete harmonic analysis. Saint Petersburg: NIIMM; 2003. 288 s. (In Russ.)
4. Orudzhev E.G., Econometrics. Baku: AFPolygraph; 2018. 384 p.

9. Оруджев Э.Г. О некоторых актуальных математических аспектах изучения финансовых рынков // Bakı Universitetinin Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası. 2009. № 3. С. 45–49.
10. Orudzhev E.G. The resolvent and spectrum for a class of differential operators with periodic coefficients // Functional Analysis and Its Applications. 2000. Т. 34. № 3. С. 232–234.
11. Orudzhev E., Mammadova L. Prediction of EUR/AZN exchange rate dynamics on the basis of spectral characteristics // Journal of International Studies. 2020. № 13(2). С. 242–258. DOI: 10.14254/2071-8330.2020/13-2/17.
12. Bai J, Perron P. Estimating and Testing Linear Models with Multiple structural Changes // Econometrica. 1998. Т. 66. № 1. С. 47–48.
13. Verbeek Marno. A Guide to Modern Econometrics. Rotterdam: Erasmus University Rotterdam, 2012. 514 с.
14. Dariusz Grzesica., Wiechek Pawel. Advanced Forecasting Methods Based on Spectral Analyses // Procedia Engineering. 2016. Т. 161. С. 253–258.
15. Центральный банк Азербайджанской республики [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <https://www.cbar.az/other/azn-rates?act=betweenForm&from%5Bday%5D=3&from%5Bmonth%5D=2&from%5Byear%5D=2017&to%5Bday%5D=3&to%5Bmonth%5D=8&to%5Byear%5D=2018&rateID=rubl>.

5. Protasov YU.M., Yurov V.M. Harmonic analysis of periodic fluctuations in sales volumes of companies based on the tool «Regression» MS EXCEL. Vestnik MGOU. Seriya: Ekonomika = Vestnik MGOU. Series: Economy. 2016; 2: 115-121. (In Russ.)
6. Obara T. Dynamics of exchange rate fluctuations between Yen and the US-Dollar. Applied Econometrics and International Development. 2004; 4(1): 95-104.
7. Dolinar A. L. Spectral Analysis of Exchange Rates. International Journal of Organizational Leadership. 2013; 2(1): 21-28.
8. Orudzhev E.G. Investigation of the spectrum of one class of a differential beam with almost

periodic coefficients. Doklady Akademii Nauk Azerbaydzhana = Reports of the Academy of Sciences of Azerbaijan. 1999; 1(2): 27-31.

9. Orudzhev E.G. On some topical mathematical aspects of the study of financial markets. Bakı Universitetinin Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası = News of Baku University, physics-mathematical sciences series. 2009; 3: 45-49.

10. Orudzhev E.G. The resolvent and spectrum for a class of differential operators with periodic coefficients. Functional Analysis and Its Applications. 2000; 34; 3: 232-234.

11. Orudzhev E., Mammadova L. Prediction of EUR/AZN exchange rate dynamics on the basis of spectral characteristics. Journal of International Studies. 2020; 13(2): 242-258. DOI: 10.14254/2071-8330.2020/13-2/17.

12. Bai J, Perron P. Estimating and Testing Linear Models with Multiple structural Changes. Econometrica. 1998; 66; 1: 47-48.

13. Verbeek Marno. A Guide to Modern Econometrics. Rotterdam: Erasmus University Rotterdam; 2012. 514 p.

14. Dariusz Grzesica., Wiechek Pawel. Advanced Forecasting Methods Based on Spectral Analyses. Procedia Engineering. 2016; 161: 253-258.

15. Tsentral'nyy bank Azerbaydzhanskoy respubliki = Central Bank of the Azerbaijan Republic [Internet]. Available from: <https://www.cbar.az/other/azn-rates?act=betweenForm&from%5Bday%5D=3&from%5Bmonth%5D=2&from%5Byear%5D=2017&to%5Bday%5D=3&to%5Bmonth%5D=8&to%5Byear%5D=2018&rateID=rubl>.

Сведения об авторе

Лейла Маздек кызы Мамедова

К.ф.-м.н., доцент кафедры «Математическая экономика»

Бакинский государственный университет,
Баку, Азербайджан

E-mail: l.mamedova2807@gmail.com

Information about the author

Leyla Mazdek Mamedova

Candidate of Physics and Mathematics Sciences,
Associate Professor at Department of Mathematical
Economic

Baku State University, Baku, Azerbaijan

E-mail: l.mamedova2807@gmail.com