УДК 51.7
DOI: http://dx.doi.org/10.21686/2500-3925-2021-3-4-11

В.М. Романчак

Белорусский национальный технический университет,
Минск, Республика Беларусь

Проблема количественного измерения полезности

Цель исследования. *Анализ литературы показывает, что в теории потребительского поведения распространена порядковая теория полезности. Для анализа потребительских предпочтений применяют функцию полезности, которая характеризует величину полезности потребляемых товаров и услуг в шкале порядка. Причем для нахождения предельной полезности товара используют арифметические операции, которые невозможны в шкале порядка. Чтобы разрешить арифметические операции необходим количественный анализ функции полезности. Следовательно, актуальной является проблема количественного измерения функции полезности.*

Проблема измерения возникает и в теории принятия решений. Например, метод анализа иерархий является популярным методом решения многокритериальных задач, но содержит ошибочную модель субъективного измерения. По этой причине в теории принятия решений появляются другие методы, которые должны заменить метод анализа иерархий. Активно развивается теория важности критериев. Однако в теории важности критериев также не решена проблема количественного измерения.

Длительное время проблема измерения существует и в психофизике. Существование двух несовпадающих психофизических законов противоречит классической теории измерений. Недавно предложено решение этой проблемы методом рейтинга. Доказана эквивалентность основных законов психофизики. В данной работе предлагается использовать метод рейтинга для измерения предпочтений в теории полезности и в теории принятия решений.

Материалы и методы. *Областью определения рейтинга является множество упорядоченных пар объектов. Причем на множестве упорядоченных пар определена композиция (операция сложения) объектов. Рейтингом называем число, которое присваивают в ходе измерения упорядоченной паре объектов. Предполагается, что рейтинг сохраняет операцию композиции упорядоченных пар.*

Для проведения измерения выбирается арифметическая операция. Результат измерения должен совпадать с результатом арифметической операции. Результатом арифметическая операции является разность или отношение значений величины. Значения рейтинга совпадают с результатом арифметической операции (с точностью до изоморфизма).

Аддитивность рейтинга использована для проверки адекватности результатов измерений. Для этого предполагается независимость рейтинга от способа измерения. Теоретическим обоснованием независимости является условие изоморфизма. Эмпирическим подтверждением независимости является эквивалентность основных психофизических законов.

Результаты. *В работе излагается аксиоматический подход к проблеме измерения. Измерение можно проводить как объективными, так и субъективными способами. Сформулировано аксиоматическое и классическое определение рейтинга. Из аксиоматического определения следует классическое определение для специального множестве объектов. Классическое определение является конструктивным. Для проверки адекватности результатов измерений достаточно сопоставить рейтинги, полученные разными способами измерения (метод альтернатив).*

Заключение. *Метод рейтинга является методом количественного измерения. Метод рейтинга можно использовать при построении модели потребительского поведения и в теории принятия решений.*

Ключевые слова: *теория измерений, закон Фехнера, закон Стивенса, метод анализа иерархий, теория важности критериев, рейтинг, функция полезности.*

Vasily M. Romanchak

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

The Problem of Quantifying Utility

Purpose of the study. *Analysis of the literature shows that the ordinal theory of utility is widespread in the theory of consumer behavior. To analyze consumer preferences, a utility function is used, which characterizes the value of the utility of the consumed goods and services on a scale of order. Moreover, to find the marginal utility of a product, arithmetic operations are used, which are impossible on a scale of order. To allow arithmetic operations, a quantitative analysis of the utility function is required. Consequently, the problem of quantitative measurement of the utility function is relevant.*

The measurement problem also arises in decision theory. For example, the hierarchy analysis method is a popular method for solving multicriteria problems, but contains an erroneous model of subjective measurement. For this reason, other methods appear in decision-making theory that should replace the method of analyzing hierarchies. The theory of the importance of criteria is being actively developed. However, the theory of the importance of criteria also does not solve the problem of quantitative measurement.

For a long time, the problem of measurement has also existed in psychophysics. The existence of two mismatched psychophysical laws contradicts the classical theory of measurements. Recently, a rating solution has been proposed. The equivalence of the basic laws of psychophysics has been proved. In this paper, it is proposed to use the rating method to measure preferences in utility theory and in decision theory.

Materials and methods. *The domain of the rating is the set of ordered pairs of objects. Moreover, the composition (operation of addition) of objects is defined on the set of ordered pairs. A rating is a number that is assigned during a measurement to an ordered pair of objects. The rating is assumed to preserve the operation of composition of ordered pairs.*

An arithmetic operation is selected to carry out the measurement. The measurement result must match the result of the arithmetic operation. The result of an arithmetic operation is the difference or ratio of the values of the quantity. The rating values coincide with the result of the arithmetic operation (up to isomorphism).

The additivity of the rating is used to check the adequacy of the measurement results. For this, it is assumed that the rating is independent of the measurement method. The theoretical justification for independence is the isomorphism condition. The empirical confirmation of independence is the equivalence of the basic psychophysical laws.

Results. *The paper presents an axiomatic approach to the measurement problem. Measurement can be carried out in both objective and subjective ways. The axiomatic and classical definition of the rating has been formulated. The axiomatic definition implies the classical definition for a special set of objects. The classic definition is constructive. To check the adequacy of the measurement results, it is enough to compare the ratings obtained by different measurement methods (method of alternatives).*

Conclusion. *The rating method is a quantitative measurement method. The rating method can be used to construct a model of consumer behavior and in decision-making theory.*

Keywords: *measurement theory, Fechner's law, Stevens's law, hierarchy analysis method, criteria importance theory, rating, utility function.*

Введение

Задачей количественного измерения является эмпирическое определение количественной структуры [1], [2]. Наиболее просто определить аддитивную количественную структуру [3]. Физические величины: масса, длина, время имеют аддитивную структуру. Аддитивность является естественным условием для проверки адекватности результатов измерений. Но даже не все физические величины аддитивны. Такие как температура или плотность не аддитивны. Полезность, измеряемая субъективно, не является аддитивной. Для измерения таких величин рассматривают репрезентативную теорию измерений [4].

В основе репрезентативной теории измерений лежит теория множеств (отношения множеств) [4], [5], [6]. В репрезентативной теории измерений предполагается существование для каждого свойства, подлежащего измерению, некоторой эмпирической системы с отношениями. Операции между элементами множества отдельно не рассматриваются, а считаются также отношениями. Например, двухместная операция сложения сводится к трехместному отношению между элементами.

Такая формулировка операции создала ряд трудностей, связанных с тем, что числовая система с некоторыми отношениям не всегда может быть сведена к полю действительных чисел, для элементов которого определены операции сложения, взятия противоположного значения, умножения и деления [7]. Кроме того, в репрезентативной теории измерений отсутствует встроенный механизм проверки адекватности. Поэтому существуют многочисленные примеры ошибочного применения алгебраических операций при построении математических моделей. Например:

1. Парето предполагал, что порядковые шкалы полезности достаточны для формулировки определения экономического равновесия. Тем не менее в теории Парето используют дифференцируемость функции полезности и операции вычитания. В шкале порядка возможны логические операции, но невозможны арифметические действия. Следовательно вычитание является посторонней операцией в модели Парето [8], [9]. Опираясь на ошибку Парето, Хикс утверждал, что везде, где полезность появляется в экономической теории, она может быть заменена порядковой полезностью [10], [11]. Это ложное утверждение повторяется в современной экономической литературе. Если результатом измерения является отношение порядка и определена шкала порядка, то арифметические действия неуместны [9].

2. Пусть в результате измерения определены разности значений

$$s_{ij} = \lambda_1(u_i - u_j),\ i, j = 1, 2, ..., n,$$

где s_{ij} – известная разность значений, u_i – неизвестные значения величины, λ_1 – постоянная масштаба измерения. Например, в методе анализа иерархий в результате измерения определены разности значений. Но в методе анализа иерархий вместо операции вычитания используют операцию деления, которая является посторонней арифметической операцией [12]. В многочисленных работах обращают внимание на некорректность метода иерархий [13], [14].

3. Если найдены отношения

$$h_{ij} = (v_i / v_j)^{\lambda 2},\ i, j = 1, 2, . . ., n.$$

где h_{ij} – известное отношение значений, v_i – неизвестные значения величины λ_2 – постоянная масштаба измерения; то для значений величины определена шкала логарифмических интервалов. Тем не менее в теории важности критериев в этом случае используют недопустимые арифметические операции (шкалу отношений) [15], [16].

В данной работе предлагается применять новую математическую модель количественного измерения, в которой определены бинарные операции между элементами множества. Решение проблемы измерения состоит в определении условий, при которых операциям над числами соответствуют операции над эмпирическими величинами. Чтобы избежать ошибок моделирования разработан метод количественного измерения – метод рейтинга [17], [18]. Можно считать, что рейтинг опирается не на теорию множеств, а на общую теорию функций (теорию категорий). В методе рейтинга числа присваиваются не объектам, а упорядоченным парам объектов (ω_i, ω_j). Областью определения рейтинга является множество упорядоченных пар объектов. На множестве упорядоченных пар определена композиция (операция сложения). Рейтинг – это отображение, которое сохраняет композицию упорядоченных пар.

Значения рейтинга находят на основании результатов измерения. Для проведения измерения выбирается алгебраическая операция. Результат измерения должен совпадать с результатом алгебраической операции. Результатом алгебраической операции является разность или отношение значений величины. Для разности значений определена шкала интервалов, для отношения – шкала логарифмических интервалов. Поэтому нет проблемы с выбором шкалы.

Аддитивность рейтинга позволяет проверить адекватность результатов измерений [19]. Постулируется независимость рейтинга от способа измерения. Эмпирическим подтверждением независимости является эквивалентность основных психофизических законов (изоморфизм алгебраических структур).

Новая теория измерений

В работах Дж. Барзилая [8], [9] разработана новая теория измерений. Эта новая теория кратко изложена в этом разделе. Наиболее важными элементами этой теории являются:

- Классификация моделей измерений по математическим операциям;
- Принцип отражения;
- Условие однородности.

Сущность измерения заключается в построении математической системы, которая служит моделью для данной эмпирической системы. Цель этой конструкции – дать возможность применения математических операций для нахождения значений внутри математической системы. Шкалы, которые позволяют применять операции сложения и умножения, вычитания и деления называются сильными. Показано, что все модели классической теории измерения порождают *слабые шкалы*, к которым операции сложения и умножения неприменимы. Для действительных чисел можно выполнить операции сложения и умножения, но такие операции являются посторонними, поскольку они не отражают соответствующие эмпирические операции. Посторонние операции нельзя проводить на значениях шкалы — они неуместны и неприменимы; их применение к значениям шкалы является ошибкой моделирования.

Принцип отражения является существенным элементом моделирования, который не был признан в классической теории измерения. Он утверждает, что операции внутри математической системы применимы тогда и только тогда, когда они отражают соответствующие операции внутри эмпирической системы. По принципу отражения необходимым условием применимости операции над значениями шкалы является существование соответствующей эмпирической операции. То есть принцип отражения применим в обоих направлениях и данная операция применима к математическому образу только в том случае, если эмпирическая система снабжена соответствующей операцией.

Основной результат новой теории состоит в том, что существует только одна модель сильного измерения предпочтения – модель одномерного аффинного пространства (числовая прямая). Кроме того, множество объектов должно быть подмножеством точек в одномерном аффинном пространстве.

Для выполнения измерений удобно использовать метод рейтинга [18]. Метод рейтинга является методом количественного измерения конечного или счетного множества объектов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...$. Для метода рейтинга характерны следующие элементы:

Областью определения рейтинга является множество упорядоченных пар (ω_i, ω_j), $i \geq j$.

На множестве упорядоченных пар определена композиция (операция сложения).

Рейтинг – это отображение, которое каждой паре объектов (ω_i, ω_j), $i \geq j$, ставит в соответствие численное значение.

Рейтинг преобразует композицию пар в сумму значений (сохраняет операцию).

Далее в работе теория метода рейтинга рассматривается более подробно.

Измерение

В метрологии сравнение объектов по величине является единственным способом получения измерительной информации [20]. Для измерения достаточно рассматривать конечное число объектов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, которые можно сравнить попарно по величине. Аксиоматически определены только три варианта получения измерительной информации [20]. В результате измерения объектов ω_i и ω_j можно выяснить какой из объектов больше по величине, или на сколько больше, или во сколько раз больше. Измерения можно проводить объективно, используя физические приборы, или субъективно, на основании ответов респондента.

Предполагается, что каждому объекту ω_i можно поставить в соответствие значения величины $u_i = u(\omega_i)$ или $v_i = v(\omega_i)$ которые являются действительными числами. В результате измерения получаем:

I. Отношение порядка

$$u_i \geq u_j \ (u_i \leq u_j).$$

II. Разность значений

$$(u_i - u_j)$$

III. Отношение значений

$$(v_i \ / \ v_j).$$

В первом случае арифметические операции для значений величины не определены. Здесь важно подчеркнуть, что значения u_i и u_j являются действительными числами, для которых формально определены операции сложения и умножения. Но поскольку нет эмпирического обоснования таким операциям, то складывать и умножать числа u_i и u_j нельзя. Аналогично, во втором случае определена только операция вычитания, а в третьем случае – только операция деления. Применение к значениям величины посторонних операцией, которые не соответствуют эмпирическим операциям, является ошибкой моделирования [8].

Определение. Измерение – это объективно-эмпирическая операция, которая каждой упорядоченной паре объектов (ω_i, ω_j) ставит в соответствие действительное число – результат измерения. *Результатом измерения* является разность $(u_i - u_j)$ или отношение $(v_i \ / \ v_j)$ значений. Числа u_i и

v_i называют значениями величины.

Теперь сформулируем условие для проверки адекватности результатов измерений. Способ экспериментальной проверки аддитивности для разности субъективных значений рассматривался еще О. Холдером в его аксиомах для отрезков прямой. На этот факт обратил внимание Дж. Мичелл [1]. Считаем, что результатом измерения является разность значений $(u_i - u_j)$, которая определяется эмпирически. Для разности значений формулируем условие аддитивности

$$(u_i - u_j) = \\ = (u_i - u_k) + (u_k - u_j) \quad (1)$$

где $i, j, k = 1, 2, ..., n$. Условие (1) естественно использовать для проверки адекватности результатов измерений (разностей). В том случае, когда результатом измерения являются отношения значений (v_i / v_j) должно выполняться тождество

$$\ln(v_i / v_j) = \\ = \ln(v_i / v_k) + \ln(v_k / v_j) \quad (2)$$

где $i, j, k = 1, 2, ..., n$. Это тождество можно использовать для экспериментальной проверки адекватности результатов измерений (отношений) аналогично равенству (1).

Пусть в результате измерения определены разности значений $(u_i - u_j) = \lambda R_{ij}$, где $i, j = 1, 2, ..., n$, R_{ij} – численное значение, полученное в результате измерения; λ – постоянная масштаба. Если для результатов измерений выполняется условие (1), тогда существует общее решение системы уравнений $u_i - u_j = \lambda R_{ij}$ $i, j = 1, 2, ..., n$, которое имеет вид $u_i = R_{i1}\lambda_1 + C_1$, где λ_1, C_1 – постоянные. Решение определено с точностью до линейного преобразования (в шкале интервалов).

Пусть теперь экспериментально получены отношения значений $(v_i / v_j) = \exp(\lambda R_{ij})$, λ – постоянная масштаба и результаты измерений удовлетворяют условию (2). Тогда для системы уравнений: $\ln(v_i / v_j) = \lambda R_{ij}$, $i, j = 1, 2, ..., n$, существует общее решение вида $\ln(v_i) = \lambda_2 R_{i1} + C_2$, где λ_2, C_2 – постоянные. В этом случае значения v_i также являются количественными (определены в шкале логарифмических интервалов).

Вывод. Если результатом измерения является разность значений – определена шкала интервалов, если отношение – шкала логарифмических интервалов. Если известны только отношения, то шкала отношений не определена.

Классическое определение рейтинга.

Считаем, что множество объектов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ упорядочено по возрастанию. Предполагается, что каждому объекту ω_i можно поставить в соответствие значения величины u_i и v_i. Классическое определение рейтинга основано на понятии объектов, величина которых *изменяется равномерно.* Считаем, что для таких объектов разности и отношения последовательных значений постоянны, $(u_{i+1} - u_i) = \lambda_1$, $(v_{i+1} / v_i) = \lambda_2$, λ_1, λ_2 – неизвестные постоянные. Для пары объектов результат измерения (разность и отношение значений) находится по формулам

$$(u_i - u_j) = \lambda_1(i - j), \quad (3)$$

$$\ln(v_i / v_j) = \lambda_2(i - j), \quad (4)$$

где $i, j = 1, 2, ..., n$; причем значения величины u_i определены с точностью до линейного преобразования, $u_i = C_1 + \lambda_1 i$. Аналогично логарифмические значения величины v_i имеют вид $\ln(v_i) = C_2 + \lambda_2 i$.

Покажем теперь, что существует взаимно-однозначное отображение значений величины u_i и v_i, которое сохраняет результат алгебраической операции. Пусть $C_1 = \lambda_1$ и $C_2 = \lambda_2$. Тогда $u_i = \lambda_1(i + 1)$, $\ln(v_i) = = \lambda_2(i + 1)$. Следовательно отображение $u = \lambda\ln(v)$ с постоянной $\lambda = \lambda_1 / \lambda_2$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между значениями u_i и v_i. Кроме того, разности $(u_i - u_j)$ и отношения (v_i / v_j) связаны формулой

$$\lambda_2 (u_i - u_j) = \lambda_1\ln(v_i / v_j), \quad (5)$$

где $i, j = 1, 2, ..., n$. Из равенства (5) следует, что отображение $u = \lambda\ln(v)$ преобразует отношения (v_i / v_j) в разности $(u_i - u_j)$ и тем самым сохраняет результат алгебраической операции.

Функция $u = \lambda\ln(v)$ является изоморфизмом, который переводит множество положительных действительных чисел с делением (R+, /) в действительные числа с вычитанием (R, –). Равенство (5) означает, что изоморфизм переводит отношения (v_i / v_j) в разности $(u_i - u_j)$. Пользуясь терминологией алгебры, можно говорить, что изоморфизм сохраняет результат алгебраической операций. Алгебраисты не различают изоморфные структуры. Такие структуры называют эквивалентными.

Показано, что при равномерном изменении величины существует два равноправных способа определить значения величины. Причем значения величины в общем случае не совпадают. Поэтому определим рейтинг – характеристику величины, которая не зависит от способа измерения. Обозначим левую и правую часть равенства (5) символом R_{ij} и будем называть *рейтингом* два отображения

$$R_{ij} = \lambda_2(u_i - u_j), \quad (6)$$

$$R_{ij} = \lambda_1\ln(v_i / v_j), \quad (7)$$

где λ_1, λ_2 – постоянные масштаба, u_i и v_i – значения величины.

Пример. Пусть сумма денег v_0 после каждого года увеличивается на одно и то же число процентов p. В результате сумма вклад за k лет увеличится до размера $v_k = v_0\,(1+p)^k$. Существует два способа попарного сравнения вкладов за i и j лет. Можно определить отношение сумм v_i / v_j

$$v_i / v_j = (1+p)^{i-j},$$

или найти на сколько лет один вклад отличается от другого

$$u_i - u_j = i - j.$$

Тем самым получены результаты измерения двумя способами. Рейтинг определяем по формуле (6) с $\lambda_2 = 1$ или по формуле (7) с $\lambda_1 = 1/\ln(1 + p)$, тогда $R_{ij} = i - j$. В разобранном примере оба способа измерения равноправны и рейтинг не зависит от способа измерения.

Аксиоматическое определение рейтинг

Будем рассматривать множество объектов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Областью определения рейтинга является множество упорядоченных пар (ω_i, ω_j), $i \geq j$, для которых определена операция сложения

$$(\omega_i, \omega_k) + (\omega_k, \omega_j) = (\omega_i, \omega_j),$$

где $i, j, k \in 1, 2, ..., n$. Рейтинг – это отображение, которое каждой паре объектов (ω_i, ω_j), $i \geq j$, ставит в соответствие действительное число R_{ij}, причем выполняется равенство

$$R_{ij} = R_{ik} + R_{kj}, \qquad (8)$$

где $R_{ij} = R(\omega_i, \omega_j)$. Удобно считать, что для рейтинга выполняется дополнительное условие

$$R_{ij} = - R_{ji}. \qquad (9)$$

где $i, j = 1, 2, ..., n$.

Предполагается, что каждому объекту можно поставить в соответствие значения величины $u_i = u(\omega_i)$ и $v_i = v(\omega_i)$. Значения величины связаны с рейтингом зависимостью (6) и (7), где $i, j = 1, 2, ..., n$; λ_1, λ_2 – постоянные. Значения u_i определены в шкале интервалов, значения v_i – в шкале логарифмических интервалов.

Для нахождения рейтинга выбираем *операцию измерения* и получаем в результате измерения отношения (v_i / v_j) или разности $(u_i - u_j)$. На основании результатов измерений находим рейтинг по формулам (6) или (7). Областью значений рейтинга в формулах (8), (9) является матрица рейтинга (R_{ij}).

Кроме того, возможна ситуация, когда матрица рейтинга частично определена. Например, матрица рейтинга частично определена если в результате измерения определены разности $(u_i - u_1)$, $i = 1, 2, ..., n$. В этом случае известен первый столбец матрицы рейтинга. Будем говорить, что определена *область начальных значений*, если матрица рейтинга частично определена и существует однозначное продолжение с области начальных значений на матрицу рейтинга по формулам (8), (9). Так, если определен первый столбец матрицы (R_{ij}), то элементы столбца с номером j находят по формуле

$$R_{ij} = R_{i1} - R_{j1},$$

где $i = 1, 2, ..., n$. Следовательно первый столбец является областью начальных значений.

Для измерения величины объектов следует рассматривать их взаимодействия друг с другом (рейтинги), вместо того чтобы принять один из объектов в качестве единицы измерения. Под *способом измерения* будем понимать фиксированную операцию измерения и заданную область начальных значений. Причем должны выполняться принципы:

1. Все способы измерения совершенно равноправны. Никакой способ не имеет преимущества.

2. Рейтинг не зависит от способа измерения.

Пример. Пусть требуется сравнить полезность двух денежных сумм x_i и x_j. Методом Фехнера можно определить разность значений $(u_i - u_j)$, методом Стивенса – отношение значений (v_i / v_j). Будем считать, что результаты измерений и денежные суммы связаны законами Фехнера и Стивенса [18], которые запишем в виде

$$u_i - u_j = \lambda_1(\ln(x_i) - \ln(x_j)) \qquad (11)$$

$$\ln(v_i / v_j) = \lambda_2 (\ln(x_i) - \ln(x_j)), \qquad (12)$$

λ_1, λ_2 – постоянные; x_i – денежная сумма; u_i, v_j – значения полезности суммы. Сопоставив равенства (11) и (12) видим, что законы Фехнера и Стивенса отличаются операцией измерения и совпадают с точностью до изоморфизма $u = \lambda\ln(v)$. Кроме того, из равенств (11) и (12) следует, что выполняется равенство (5), тем самым сохраняется операция измерения. Следовательно, существует рейтинг, который не зависят от способа измерения. Поэтому оба способа измерения равноправны. Таким образом для экспериментальных законов Фехнера и Стивенса выполняются принципы измерения.

Если значения полезности в левой части равенств (11) и (12) заменить рейтингом по формулам (6) и (7), то получим один и тот же закон. Объединенный закон Фехнера-Стивенса запишем в виде

$$R_{ij} = \lambda\ln(x_i / x_j) \qquad (13)$$

R_{ij} – рейтинг полезности денежных сумм, x_i – денежные суммы, λ – постоянная. Аксиоматическое определение рейтинга позволяет проверить адекватность результатов измерений. Для этого находят рейтинги альтернативными способами и проверяют, что рейтинги не зависят от способа измерения.

Метод альтернатив

Для нахождения рейтинга необходимо выбрать способ измерения. *Альтернативные* способы измерения могут отличаться:

1. Операцией измерения.

2. Областью начальных значений.

3. Операцией измерения и областью начальных значений.

Измерения можно проводить методом семантического дифференциала [22]. Респондент сравнивает по величине объекты и указывает целое число от -8 до 8. Число должно соответствовать степени превосходства объекта ω_i над объектом ω_j. Результаты измерений могут содержать случайные ошибки. Метод семантического дифференциала в такой формулировке имеет определенную аналогию с методом анализа иерархий (метод МАИ [12]). Метод МАИ служит для обоснования принятия решений в условиях определенности. В методе анализа иерархий элементы матрицы парных сравнений являются результатом парного сравнения по фундаментальной шкале степени предпочтительности объекта ω_i по отношению к объекту ω_j.

Пример. В монографии Т.Л. Саати расстояния между шестью городами попарно сопоставлял пассажир, субъективно оценивая длительность полета, «скуку в самолете» [12]. Две строки матрицы представлены в таблице 1.

Причем, в первой строке находятся результаты сравнения третьего объекта со всеми, а во второй строке – шестого объект со всеми. Например, сравнивая третий объект со вторым получаем дробь 1 / 9, так как второй объект максимально превосходит третий [12].

Метод МАИ базируется на психофизическом законе Фехнера. Для значений в законе Фехнера определена разность. Поэтому есть основание отношения из таблицы 1 заменить разностями как в таблице 2. Например, дробь u_3 / u_2 = 1/ 9 преобразована в разность (u_2 – u_3) = 9 – 1.

Таблица 2 фактически получена методом семантического дифференциала. Проверку адекватности результатов измерений выполним *методом альтернатив* [19]. В данном случае операция измерения фиксирована (разность значений), области начальных значений не совпадают (различные строки матрицы рейтинга). Используя результаты измерений (таблица 2), находим альтернативные значения рейтинга $r_{i6}(1)$ и $r_{i6}(2)$ по формулам

Таблица 1

Отношения предпочтений

Таблица 1

Отношения предпочтений

u_3 / u_i	1/8	1/9	1	1/6	1/5	2
u_6 / u_i	1/7	1/9	1/2	1/6	1/6	1

Таблица 2

Альтернативные способы измерения

Таблица 2

Альтернативные способы измерения

(u_i – u_3)	7	8	0	5	4	-1
(u_i – u_6)	6	8	1	5	5	0

Таблица 3

Альтернативные значения рейтинга

Таблица 3

Альтернативные значения рейтинга

$r(1)$	10,0	11,3	1,3	7,5	6,3	0,0
$r(2)$	10,0	13,3	1,7	8,3	8,3	0,0
$r6$	10	12,3	1,5	7,9	7,3	0
x	5729	7449	660	2732	3658	400

$$r_{i6}(1) = \\ = \lambda_1((u_i - u_3) - (u_6 - u_3), \quad (14)$$

и

$$r_{i6}(2) = \lambda_2(u_i - u_6). \quad (15)$$

Рейтинги $r_{i6}(1)$ $r_{i6}(2)$ имеют разные области начальных значений (третья и шестая строка матрицы рейтинга). Считаем, что результаты измерений в формулах (14) и (15) определены с точностью до неизвестных постоянных λ_1 и λ_2. Постоянные λ_1 и λ_2 выбраны таким образом, что выполняются условия нормировки $r_{16}(1) = 10$ и $r_{16}(2) =10$. Результаты расчетов значений $r_{i1}(1)$ и $r_{i1}(2)$ приведены в первой и второй строке таблицы 3. Среднее альтернативных значений получают по формуле

$$r_{i6} = (r_{i6}(1) + r_{i6}(2)) / 2 \quad (16)$$

Вектор средних значений r_{i6} находится в третьей строке таблицы 3.

В основу оценки адекватности модели измерения положен анализ качества уравнений регрессии r_6 на $r(1)$ и r_6 на $r(2)$. В данном случае коэффициенты корреляции $\rho_1 = \rho(r_6, r(1))$ и $\rho_2 = \rho(r_6, r(2))$ близки к единице (ρ_1 = 0,996 и ρ_2 = 0,997) и значимы по критерию Стьюдента (α = 0,05). Поэтому принимаем гипотезу об адекватности модели измерения.

В рассматриваемом примере мы имеем дело с измерениями, которые в психологии называют психофизическими. В психофизической модели измерения величину измеряют двумя методами – субъективно и объективно. В нашем случае результаты измерения должны быть связаны психофизическим законом Фехнера – Стивенса в виде (13), где R_{ij} – субъективно полученный рейтинг расстояний, x_i – объективные значения расстояний. Для экспериментальной проверки выполнения закона Фехнера – Стивенса (13) по значениям переменной r_{i6} и выражения $\ln(x_i / x_6)$ построим эмпирическое уравнение регрессии вида

$$r = b_0 + b_1 \ln(x / x_6)$$

r, x – переменные; b_0, b_1 – коэффициенты регрессии. На рисунке приведены диаграмма рассеяния и линия регрессии. Из рисунка видно, что результаты измерений достаточно хорошо согласуются с законом Фехнера – Стивенса (13). Для коэффициента b_0 принимаем нулевую гипотезу $b_0 = 0$ (допустимый уровень значимости $p = 0,5$), для коэффициента b_1 нулевую гипотезу отклоняем с $p = 0,01$. Тем самым результаты расчетов подтверждают выполнение равенства (13). Аналогичный вывод можно сделать из визуального анализа графика на рисунке.

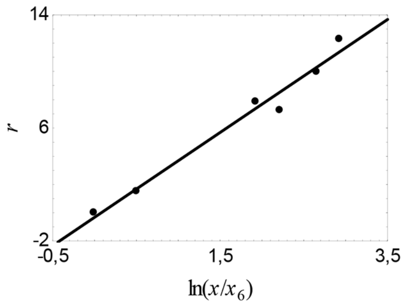

Рис. Уравнение регрессии

Заключение

В работе предлагается аксиоматический подход к проблеме измерения. С этой целью дается определение рейтинга. Приведено классическое и аксиоматическое определение рейтинга. Показано, что измерение методом рейтинга можно проводить как объективными, так и субъективными методами. Для проверки адекватности результатов измерений достаточно сопоставить рейтинги, полученные разными способами измерения.

Литература

1. Michell J. Quantitative science and the definition of measurement in psychology // British Journal of Psychology. 1997. № 88. С. 355–383.
2. Michell J. Measurement in Psychology: A Critical History of a Methodological Concept. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 246 с.
3. Narens L., Luce R. D. Measurement: The theory of numerical assignments // Psychological Bulletin. 1986. № 99. С. 166–180.
4. Stevens S.S. Mathematics, Measurement and Psychophysics. In S.S. Stevens (Ed.), Handbook of Experimental Psychology. Wiley, 1951. С. 1–49.
5. Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A. Foundation of Measurement, vol.1. New York: Academic Press, 1971. 606 с.
6. Кнорринг В.Г. Развитие репрезентативной теории измерений // Измерения, контроль, автоматизация. 1980. № 11–12. С. 3–10.
7. Ломов Б.Ф., Николаев В.И., Рубахин В.Ф. Некоторые вопросы применения математики в психологии // Психология и математика. М.: Наука, 1976. С. 6–43.
8. Barzilai J. Inapplicable Operations on Ordinal, Cardinal, and Expected Utility // Real-World Economic Review. 2013. № 63. С. 98–103.
9. Barzilai J. Preference function modelling: The mathematical foundations of decision theory // Trends in Multiple Criteria Decision Analysis / Ehrgott M., Figueira J.R., Greco S. (Eds.). N.-Y.: Springer, 2010. С. 57–86.
10. Hicks J.R. Value and Capital. Second Edition. Oxford University Press. 1946. 340 с.
11. Samuelson P.A. Foundations of Economic Analysis. Harvard University Press, 1947. 447 с.
12. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1989. 278 с.
13. Подиновский В.В., Подиновская О.В. О некорректности метода анализа иерархий // Проблемы управления. 2011. № 1. С. 8–13.
14. Подиновский В.В., Подиновская О.В. Еще раз о некорректности метода анализа иерархий // Проблемы управления. 2012. № 4. С. 75–78.
15. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2007. 64 с.
16. Подиновская О.В., Подиновский В.В. Анализ иерархических многокритериальных задач принятия решений методами теории важности критериев // Проблемы управления. 2014. № 6. С. 2–8.
17. Романчак В.М. Измерение нефизической величины // Системный анализ и прикладная информатика. 2017. № 4. С. 39–44.
18. Романчак В.М. Субъективные измерения (теория рейтингов) // Журнал Белорусского государственного университета. Философия. Психология. 2020. № 3. С. 87–98.
19. Серенков П.С., Романчак В. М. Качество как субъективно измеряемая величина. // Приборы и методы измерений. 2019. Т. 10. № 1. С. 99–110.
20. Шишкин И.Ф. Теоретическая метрология. Ч. 1. Общая теория измерений: Учебник для вузов. СПб.: Питер, 2010. 192 с.
21. Grondin S. Psychology of Perception, Springer International Publishing, Switzerland. 2016. 192 p. DOI: 10.1007/978-3-319-31791-5.
22. Osgood Ch. Studies on generality of affective meaning system // Amer. Psychol. 1962. № 17. С. 10–28.

References

1. Michell J. Quantitative science and the definition of measurement in psychology. British Journal of Psychology. 1997; 88: 355-383.
2. Michell J. Measurement in Psychology: A Critical History of a Methodological Concept. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. 246 p.
3. Narens L., Luce R. D. Measurement: The theory of numerical assignments. Psychological Bulletin. 1986; 99: 166–180.
4. Stevens S.S. Mathematics, Measurement and Psychophysics. In S.S. Stevens (Ed.), Handbook of Experimental Psychology. Wiley; 1951: 1-49.
5. Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A. Foundation of Measurement, vol.1. New York: Academic Press; 1971. 606 p.
6. Knorring V.G. Development of a representative theory of measurements. Izmereniya, kontrol', avtomatizatsiya = Measurements, control, automation. 1980; 11–12: 3–10. (In Russ.)
7. Lomov B.F., Nikolayev V.I., Rubakhin V.F. Some questions of the application of mathematics in psychology. Psikhologiya i matematika = Psychology and mathematics. Moscow: Nauka; 1976: 6-43. (In Russ.)
8. Barzilai J. Inapplicable Operations on Ordinal, Cardinal, and Expected Utility. Real-World Economic Review. 2013; 63: 98-103.
9. Barzilai J. Preference function modelling: The mathematical foundations of decision theory. Trends in Multiple Criteria Decision Analysis / Ehrgott M., Figueira J.R., Greco S. (Eds.). N.-Y.: Springer; 2010: 57-86.
10. Hicks J. R. Value and Capital. Second Edition. Oxford University Press. 1946. 340 p.
11. Samuelson P. A. Foundations of Economic Analysis. Harvard University Press; 1947. 447 p.
12. Saati T. L. Prinyatiye resheniy. Metod analiza iyerarkhiy = Decision-making. Hierarchy analysis method. Moscow: Radio and communication; 1989. 278 p. (In Russ.)
13. Podinovskiy V.V., Podinovskaya O.V. On the incorrectness of the hierarchy analysis method. Problemy upravleniya = Control problems. 2011; 1: 8–13. (In Russ.)
14. Podinovskiy V.V., Podinovskaya O.V. Once again about the incorrectness of the hierarchy analysis method. Problemy upravleniya = Control problems. 2012; 4: 75–78. (In Russ.)
15. Podinovskiy V.V. Vvedeniye v teoriyu vazhnosti kriteriyev v mnogokriterial'nykh zadachakh prinyatiya resheniy = An introduction to the theory of the importance of criteria in multicriteria decision-making problems. Moscow: FIZMATLIT. 2007; 64 p. (In Russ.)
16. Podinovskaya O.V., Podinovskiy V.V. Analysis of hierarchical multicriteria decision-making problems by methods of the theory of the importance of criteria. Problemy upravleniya = Control problems. 2014; 6: 2–8. (In Russ.)
17. Romanchak V.M. Measurement of a non-physical quantity. Sistemnyy analiz i prikladnaya informatika = System analysis and applied informatics. 2017; 4: 39–44. (In Russ.)
18. Romanchak V.M. Subjective measurements (theory of ratings). Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Psikhologiya = Journal of the Belarusian State University. Philosophy. Psychology. 2020; 3: 87-98.
19. Serenkov P.S., Romanchak V. M. Quality as a subjectively measured value. Pribory i metody izmereniy = Instruments and measurement methods. 2019; 10; 1: 99–110. (In Russ.)
20. Shishkin I. F. Teoreticheskaya metrologiya. CH. 1. Obshchaya teoriya izmereniy: Uchebnik dlya vuzov = Theoretical metrology. Part 1. General theory of measurements: Textbook for universities. Saint Petersburg: Peter; 2010. 192 p. (In Russ.)
21. Grondin S. Psychology of Perception, Springer International Publishing, Switzerland. 2016. 192 p. DOI: 10.1007/978-3-319-31791-5.
22. Osgood Ch. Studies on generality of affective meaning system. Amer. Psychol. 1962; 17: 10-28.

Сведения об авторах

Василий Михайлович Романчак
К.ф.-м.н, Доцент, Доцент кафедры Инженерная математика, Белорусский национальный технический университет (БНТУ), Минск, Беларусь
Эл. почта: romanchak@bntu.by

Information about the author

Vasily M. Romanchak
Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the department Engineering mathematics
Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus
E-mail: romanchak@bntu.by