УДК [005.334::512.568.2]:519.83
DOI: http://dx.doi.org/10.21686/2500-3925-2021-2-12-21

Т.А. Уразаева

Поволжский государственный технологический университет,
Йошкар-Ола, Россия

Реляционная теория риска и ее приложения к теоретико-игровым задачам нечисловой экономики

Целью работы *является исследование оснований общей теории риска. Для формирования единой формальной концепции риска проанализирован ряд встречающихся в литературе определений термина «риск». Отмечена определенная избыточность количества сущностей, привлекаемых к определению этого термина. Выявлены необходимые атрибуты генезиса этого понятия. На основе проведенного анализа, используя инструментарий современной алгебры, построено новое формальное, математически строгое определение риска. Фактически в работе предложена новая реляционная теория риска, привлекающая для определения понятия «риск» лишь две сущности: множество и порядок предпочтения, индуцирующий на этом множестве минимально структуру полурешетки или семейства полурешеток.*

Работа, также, содержит описание подхода для изучения в теоретико-рисковой постановке задач, в которых риск, в традиционном понимании отсутствует, в которых отношение предпочтения не индуцирует полурешетку и/или является предпорядком. Показано, что в этом случае при выявлении подходящего отношения эквивалентности на множестве исходов, задача может быть сведена к классической (в терминах предлагаемой концепции риска) теоретико-рисковой постановке.

Вторая часть работы содержит пример прямого использования новой реляционной теории риска при исследовании нечисловых экономик. Рассмотрена задача анализа ситуации противостояния двух технологически неравнозначных стран в теоретико-игровой постановке. Речь идет о грандиозной космической программе – организации пилотируемых полетов на Марс. Масштабность предмета противостояния, невозможность количественных оценок последствий реализации сценариев этого проекта, делают невозможными на этапе предварительного анализа какие-либо количественные оценки. Поэтому в качестве исходных данных для анализа противостояния возможно использование лишь экспертных оценок предпочтений на множестве исходов. В этих условиях продемонстрировано возникновение тех или иных рисков реализации проекта для обоих игроков. В ходе анализа примера, иллюстрирующего применение новой реляционной теории риска, ряд принципов оптимальности, рассматриваемых в теории игр, был распространен на случай, когда заданы лишь частичные порядки на множестве исходов игры.

В качестве ***методологической базы*** *исследования были использованы достижения современной алгебры, в частности теории реляционных систем, а также концепции и методы теории игр, такие, как представление игры в нормальной форме, отбор доминирующих и исключение доминируемых стратегий, выбор решений из множества осторожных стратегий, а также из множества равновесий по Нэшу.*

Основным результатом работы *является обоснование реляционной теории риска, формирование ее понятийной базы, демонстрация конструктивного характера теории на примере решения конкретной задачи анализа риска в экономической системе, описанной в терминах нечисловых характеристик.*

Представленный в статье материал представляет интерес для исследователей в области теории риска и теории игр, а также для специалистов-практиков, занимающихся социально-экономическим и политическим прогнозированием в условиях дефицита информации.

Ключевые слова: *диаграмма Хассе, линейный порядок, отношение предпочтения, полурешетка, порядок, принцип оптимальности, предпорядок, реляционная теория риска, теория игр, частичный порядок.*

Tatiana A. Urazaeva

Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, Russia

Relational Theory of Risk and Its Applications to Game Theory Problems of Non-Numerical Economics

The purpose of the work *is to study the foundations of a general risk theory. To form a single formal concept of risk, a number of definitions of the term "risk" found in the literature have been analyzed. There is a certain redundancy in the number of entities involved in the definition of this term. The necessary attributes of the genesis of this concept have been identified. Based on the analysis, using the instrumentation of modern algebra, a new formal, mathematically strict definition of risk is built. In fact, the paper proposes a new relational theory of risk, attracting only two entities to define the concept of "risk": set and order of preference, inducing on this set the minimum structure of a semilattice or family of semilattices.*

The paper also describes an approach for studying in theoretical-risk setting problems in which there is no risk, in the traditional sense, in which the preference relation does not induce a semilattice and/or is a preorder. It is shown that in this case, when identifying a suitable equivalence relation on a set of outcomes, the problem can be reduced to a classical theoretical-risk setting.

The second part of the paper contains an example of the direct use of a new relational risk theory in the study of non-numerical economies. The problem of analysis of the situation of confrontation between two technologically unequal countries in game-theoretical staging is considered. We are talking about a grandiose space program - the organization of manned flights to Mars. The scales of the object of confrontation, the impossibility of quantitative assessments of the consequences of the implementation of scenarios of this project, make any quantitative assessments impossible at the stage of preliminary analysis. Therefore, only expert estimates of preferences at multiple outcomes can be used as initial data for confrontation analysis. Under these conditions, the emergence of certain risks of the project implementation for both players was demonstrated. During the analysis of the example illustrating the application of the new relational risk theory, a number of optimality principles considered in game theory were extended to the case when only partial orders are given on a set of game outcomes.

As the methodological basis of the research we used the achievements of modern algebra, in particular the theory of relational systems, as well as the concepts and methods of game theory, such as representing the game in normal form, selecting dominant and eliminating dominant strategies, choosing solutions from many cautious strategies, as well as from the set of Nash Equilibria.
The main result of the paper *is the substantiation of relational risk theory, the formation of its conceptual base, the demonstration of the constructive nature of the theory on the example of solving a specific problem of risk analysis in an economic system described in terms of non-numerical characteristics.*
The material presented in the article is of interest to researchers in the field of risk theory and game theory, as well as to practitioners engaged in socio-economic and political forecasting in conditions of lack of information.

Keyword: *Hasse diagram, linear order, preference relation, semilattice, order, optimality principle, preorder, relational risk theory, game theory, partial order.*

Введение

Отсутствие единого формального понимания термина «риск» становится сегодня серьезной проблемой не только для формирования оснований теории риска, но и при разработке общей, не зависящей от исследуемой предметной области, методологии исчисления, измерения и управления риском.

Разные источники предлагают самые разные определения риска. Например, ГОСТ Р 51897-2011 / ISO Guide 73:2009 «Менеджмент риска. Термины и определения» определяет риск как следствие влияния неопределенности на достижение поставленных целей, разъясняя, в дальнейшем, в примечаниях понятия неопределенности, цели, события, последствий события и/или их сочетания. При этом в пояснениях привлекаются термины «вероятность», «назначение», «обстоятельства» и т. п. Иначе говоря, определение риска по ГОСТ привлекает множество дополнительных сущностей, относительно которых справедлив вопрос об избыточности их количества.

Классический учебник финансового менеджмента [11] предлагает следующее определение: «риск – это вероятность возникновения убытков или недополучения доходов по сравнению с прогнозируемым вариантом». Здесь риск отождествляется с вероятностью одной или другой группы событий. За кадром остаются вопросы выбора той или иной вероятности, способа формирования той или иной группы событий. И, наконец, возникает вопрос, так ли необходимо привлечение понятия вероятности.

Рассмотрим еще один пример. В монографии [19] под риском понимается возможность возникновения условий, приводящих к негативным последствиям для участников проекта. Относительно этого определения возможно суждение о его неполноте: разве субъект принятия решений (СПР) рискует не в надежде на лучший исход. Кроме того, можно задаться вопросом формального понимания словосочетания «возможность возникновения условий».

В работах по теории риска в страховании [4, 7, 28] под риском понимается ситуация, когда капитал страховой компании становится отрицательным. Задача оценки этого риска ставится, как правило, в теоретико-вероятностной постановке, то есть здесь снова привлекается понятие вероятности.

Если расширять набор предметных областей, оперирующих понятием «риск», то многообразие определений, а также используемых сущностей, в этих определениях будет только расти, и, скорее всего, опережающими темпами. Таким образом, в свете разработки общей теории риска, очевидно желание математически строго формализовать понятие «риск», привлекая, при этом к определению минимум сущностей.

С математической точки зрения риск в условиях вероятностной неопределенности удобно отождествить с понятием случайной величины, такую точку зрения можно встретить в работах А.А. Новоселова [15, 16]. Такое отождествление в неявной форме можно обнаружить в работах Е.В. Булинской [3], В.Ю. Королева, В.Е. Бенинга и С.Я. Шоргина [9]. Однако, наличие вероятностной неопределенности не является необходимым условием возникновения риска.

Попробуем выделить необходимые атрибуты риска. Первое, на что следует обратить внимание, это множество исходов. Для речи о риске, необходимо, чтобы это множество было более чем одноэлементно. Этот факт явно отмечен, в частности, в работах А. М. Дуброва с соавторами [6] и А. С. Шапкина [24]. Вторым необходимым атрибутом генезиса риска оказывается отношение предпочтения на множестве исходов. Наличие этого отношения обычно предполагается [3, 4, 6, 7, 9, 14, 15, 17, 20, 23, 24, 27, 28]. При этом считается, что это отношение индуцирует на множестве некоторый линейный порядок. В то же время, можно показать, что требование наличия линейного порядка избыточно, а с другой стороны, произвольный частичный порядок не всегда формирует ситуацию риска.

Предлагаемая вашему вниманию статья содержит, в частности, исследование минимальных требований, предъявляемых к отношению предпочтения, таких, чтобы можно было говорить о генезисе риска. Фактически, речь пойдет о создании реляционной теории риска.

Термин «реляционная теория риска», однако, с формальной точки зрения, не является новым. Так в 2011 году было опубликовано исследование, посвященное эпистемологическим аспектам формирования понятия «риск» [25]. Авторы этой работы рассматривают риск как «отношение риска» между «объектами риска» (видами опасностей) и «объектами под угрозой», которые наделяются ценностью в рамках некоторого социального процесса. Иначе говоря, эту работу можно рассматривать как попытку семантического анализа понятия риск. Название этой работы «Реляционная теория риска» вскрывает скорее онтологию употребления понятия «риск» в различных конструктах человеческого знания, а не претендует на математически строгое понимание генезиса риска. Данная же статья посвящена именно строгому математическому анализу генезиса риска в отрыве от семантики конкретных предметных областей.

Важным аспектом любой теории является ее предсказательная функция, реализующаяся через предлагаемый теорией инструментарий. В данной статье в качестве иллюстрации применения соответствующего инструментария приведен пример принятия решений в области, лежащей, с одной стороны, в сфере макроэкономики, а с другой в сфере политики. При этом поиск оптимального решения осуществляется в теоретико-игровой постановке задачи управления рисками в условиях отсутствия количественных оценок исходов игры (нечисловая экономика). Такая постановка задачи интересна тем, что максимально утилизирует подходы, предлагаемые новой теорией риска. Заметим, что решение задач терии игр с различными частичными порядками предпочтений игроков вызывает значительный интерес у исследователей, см., например, обзор в диссертации [18]. Однако, решение таких задач с учетом введения строгого понятия «риск» предпринимается предположительно впервые.

1. Основные идеи концепции риска

Рассмотрим простейший вариант развития системы, см. рис. 1. На рисунке Ω – множество возможных исходов эволюции системы. В начальный момент времени $t = 0$ система находится в состоянии ω_0. С течением времени, к моменту $t = T$, система оказывается в некотором состоянии $\omega_T \in \Omega$.

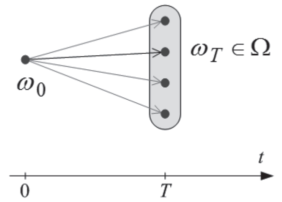

Рис. 1. Изменение состояния системы во времени

Отметим, что риск в данной ситуации возможен лишь тогда, когда множество исходов более чем одноэлементно:

$$|\Omega| > 1.$$

В дальнейшем, для простоты, будем предполагать, что множество Ω конечно:

$$|\Omega| < \infty.$$

Формализуем процесс принятия решений. Введем функцию реакции системы на решение СПР:

$$f : \Delta \to \Omega, \tag{1}$$

где Δ – множество решений СПР.

В настоящей работе мы абстрагируемся от природы и содержания функции f, а основное внимание уделим отношению предпочтения СПР, заданному на множестве исходов развития системы Ω.

Пусть отношение предпочтения СПР является отношением частичного порядка. Рассмотрим случай, когда множество исходов развития системы состоит из 4 элементов. В качестве возможных примеров отношения предпочтения сначала рассмотрим варианты, приведенные на рис. 2. В каждом варианте отношение предпочтения СПР задано диаграммами Хассе [22], представленными утолщенными ориентированными линиями.

Вариант **c**, на рис. 2, представляет случай, когда порядок предпочтения является линейным. Здесь все исходы сравнимы друг с другом. Это наиболее простая ситуация. Именно она является обычной для классической теории риска. Наиболее предпочтительным исходом в этом варианте является ω_1.

Вариант **a**, на рис. 2, представляет случай, когда порядок предпочтения на множестве Ω образует верхнюю полурешетку [26]. Наиболее предпочтительным исходом в этом варианте также является ω_1.

Заметим, что для обоих перечисленных вариантов присутствует риск принятия решения, приводящего к не лучшему для СПР исходу, а также обратим внимание на то, что представленные варианты отношений предпочтения, в рамках которых можно говорить о возникновении риска, были изучены в монографии автора [21].

Вариант **b**, на рис. 2, представляет случай рискогенной ситуации, впервые рассматриваемой в рамках данной работы. Здесь множество Ω, вместе с отношением предпочтения СПР на нем, образуют реляционную систему, называемую нижней полурешеткой [26]. Этот вариант соответствует случаю избегания наихудшего исхода со стороны СПР. Для СПР, в данном случае, оптимальным решением может стать выбор, приводящий к исходам из множества максимальных элементов для данного частичного порядка, а конкретно из множества $\{\omega_1, \omega_3\}$.

В качестве примеров частичных порядков, наличие которых на множестве Ω не позволяет говорить о присутствии риска при принятии решения на основе функции (1), рассмотрим варианты, приведенные на рис. 3.

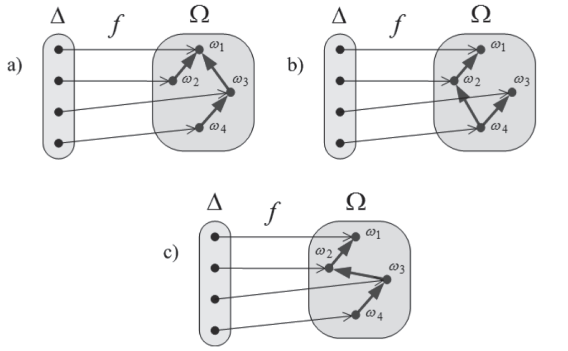

Рис. 2. Функция реакции системы и варианты отношения предпочтения СПР на ее кодомене: случаи, для которых возможно возникновение риска

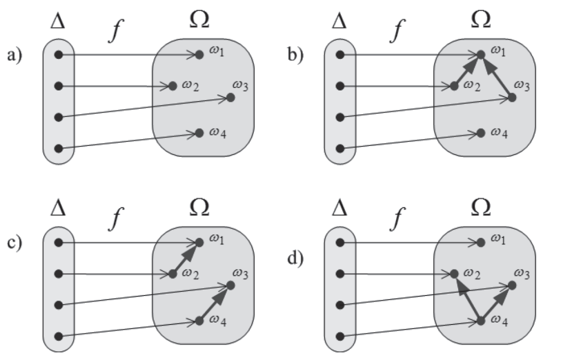

Рис. 3. Функция реакции системы и варианты отношения предпочтения СПР на ее кодомене: случаи, когда невозможно говорить о риске

Вариант **a**, на рис. 3, представляет из себя вырожденный случай, когда у СПР совсем нет предпочтений. О наличии риска в этом случае вообще не может быть и речи.

Вариант **b**, на рис. 3, содержит исход ω_4, несравнимый с исходами из множества $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Наличие этого исхода также делает представленную ситуацию лишенной риска: мы не знаем, какое решение лучше выбрать, то, что приводит к исходу ω_1, или то, что приводит к исходу ω_4.

Вариант **d**, на рис. 3, аналогичен варианту **b** в том смысле, что в кодомене функции f есть исход ω_1, не сравнимый не с одним из исходов множества $\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Наличие исхода ω_1 делает и эту ситуацию лишенной риска: мы не знаем, какое решение лучше выбрать, то, которое приводит к исходу ω_1, или то, которое приводит к исходу из множества $\{\omega_2, \omega_3\}$.

Вариант **c**, на рис. 3, содержит на кодомене функции f два непересекающихся подмножества $\{\omega_1, \omega_2\}$ и $\{\omega_3, \omega_4\}$, элементы из которых не сравнимы друг с другом. Это означает, что здесь не возможен рациональный выбор. То есть, фактически, в этой ситуации риск не возникает. Тем не менее, если на множестве Ω для варианта **c**, на рис. 3, ввести отношение безразличия A, с одной стороны такое, что ω_1 A ω_3 и ω_2 A ω_4, а с другой, имеющее конкретную проблемно-ориентированную интерпретацию, то имеющее место в данном варианте отношение предпочтения СПР индуцирует уже на фактормножестве Ω / A линейный порядок. Этот порядок имеет тривиальную теоретико-рисковую интерпретацию. Заметим, что линейный порядок здесь, суть частный случай порядка полурешетки. Для варианта **c**, на рис. 3, при условии наличия отношения безразличия A, оптимальным решением СПР будет выбор решения, приводящего к одному из исходов класса эквивалентности ω_1 / A = ω_3 / A = $\{\omega_1, \omega_3\}$.

Отметим, что в вариантах **b** и **d**, рис. 3, можно поступить аналогично предыдущему случаю. Если существует соответствующая проблемно-ориентированная интерпретация, то введя исход ω_4 в варианте **b** или исход ω_1 в варианте **d** в класс эквивалентности к одному из остальных исходов, можно свести ситуацию к постановке задачи, имеющей теоретико-рисковую интерпретацию. Здесь, однако, важно понимать, что введение такого отношения эквивалентности в общем случае менее очевидно, чем в случае **c**, и требует дополнительного обоснования.

Подводя итоги анализа всех выше представленных вариантов, можно сделать вывод о том, что фундаментальным элементом концепции риска является наличие частичного порядка предпочтения на множестве исходов развития системы, индуцирующего структуру полурешетки. При этом верхняя полурешетка соответствует случаю стремления СПР к достижению лучшего результата, а нижняя – к стремлению СПР избежать худшего исхода. Еще раз, обратим внимание и на то, что линейный порядок, свойственный классическим моделям риска, является частным случаем полурешетки любого вида.

Итак, можно констатировать, что для определения термина «риск» достаточно всего двух сущностей – множества исходов и отношения предпочтения на этом множестве. При этом множество исходов и отношение предпочтения в случае, когда влияние СПР на систему описывается функцией (1), должны образовывать реляционную систему, называемую полурешеткой. В случае, если отношение предпочтения не индуцирует на множестве исходов полурешетку, то ситуация риска все равно возможна. Для этого необходимо, чтобы на множестве исходов можно было определить такое проблемно интерпретируемое отношение эквивалентности, что уже на соответствующем фактор-множестве исходов имеющееся отношение предпочтения СПР естественным образом индуцировало бы отношение, порождающее структуру полурешетки. Аналогично ситуация риска может быть выявлена и в случае такого дефицита информации о сложной экономической системе, когда отношение предпочтения СПР является лишь предпорядком.

Модели, основанные на частичных порядках, индуцирующих структуры решеток, достаточно широко используются в задачах анализа политик безопасности, см. работы А.В. Бородина [1, 2], А.А. Грушо и Е.Е. Тимониной [5]. Важно, что модели полурешеток, представленные в данной работе, в значительной мере обобщают модели, основанные на решетках.

Расширим модель принятия решений. Введем функцию реакции системы на решение СПР с учетом влияния природы:

$$f : \Delta \times \Omega_0 \rightarrow \Omega, \tag{2}$$

где Ω_0 – множество состояний природы.

Рассмотрим простой пример такой функции, см. рис. 4. Здесь, как и ранее, на кодомене этой функции задано отношение предпочтения СПР, представленное утолщенными направленными линиями диаграммы Хассе.

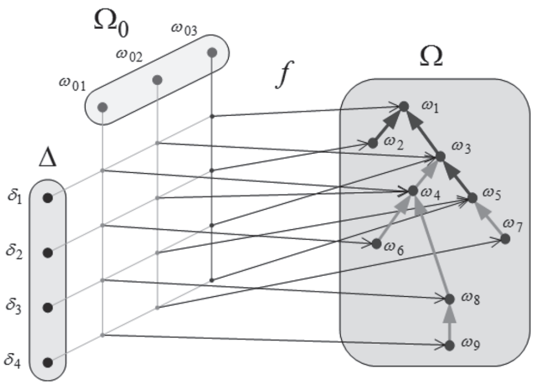

Рис. 4. Пример функции реакции системы, учитывающей состояния природы

Введем ряд обозначений. Пусть $\mathrm{Cod}(g)$ – кодомен функции g, пусть, далее, функция $f[\omega_0] : \Delta \rightarrow \Omega$ определяет реакцию системы на выбор СПР $\delta \in \Delta$ при фиксированном состоянии природы $\omega_0 \in \Omega_0$ следующим образом: $f[\omega_0](\delta) = f(\delta, \omega_0)$.

Для возникновения риска в этой ситуации необходимо, чтобы хотя бы на одном множестве вида $\mathrm{Cod}(f[\omega_0])$, $\omega_0 \in \Omega_0$, имелся порядок предпочтения, индуцирующий структуру полурешетки. Именно в этом случае поведение СПР может быть рациональным.

Например, для нашего примера, рис. 4, имеем,

$$\mathrm{Cod}(f[\omega_{01}]) = \{\omega_4, \omega_6, \omega_8, \omega_9\},$$

$$\mathrm{Cod}(f[\omega_{02}]) = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_7\},$$

$$\mathrm{Cod}(f[\omega_{03}]) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}.$$

Легко заметить, что на всех этих множествах порядок предпочтения индуцирует структуру верхней полурешетки, и, таким образом, рис. 4 представляет ситуацию риска.

Обобщая рассмотренные примеры, риск можно определить следующим образом.

Определение. Пусть задана функция реакции системы вида (1), тогда ***риск*** – это реляционная система

$$\langle \Omega, \rho \rangle,$$

где Ω – множество исходов развития системы, $|\Omega| > 1$,

ρ – отношение предпочтения на множестве Ω, представляющее из себя отношение порядка, индуцирующее на Ω структуру полурешетки.

Пусть задана функция реакции системы вида (2), тогда ***риск*** – это непустое семейство невырожденных полурешеток

$$\langle \mathrm{Cod}(f[\omega_0]), \rho \rangle,\ \omega_0 \in \Omega_0,$$

где Ω_0 – множество состояний природы,

ρ – отношение предпочтения на множестве Ω, представляющее из себя отношение порядка.

Более компактно, но менее формально, можно сказать, что ***риск*** – это непустое семейство невырожденных полурешеток на более чем одноэлементном множестве исходов.

2. Пример теоретико-игровой постановки задачи выбора оптимальных решений в нечисловой экономике

В качестве примера, на котором можно апробировать новую реляционную теорию риска, воспользуемся задачей оценки перспектив (риска) реализации технически чрезвычайно сложной амбициозной космической программы, связанной с организацией пилотируемых полетов на Марс, с точки зрения научно-технических, экономических и политических последствий реализации проекта для стран - его участников. Поскольку сложность проекта такова, что невозможно точно оценить последствия различных сценариев его реализации не с экономической, не с политической, не с научной точки зрения, то возможны только оценки предпочтения одного исхода проекта по отношению к другому исходу для отдельных (не для всех) пар исходов с точки зрения СПР каждого участника проекта. Иначе говоря, речь идет о теоретико-игровом анализе ситуации в нечисловой экономике.

Особенности этого примера позволяют надеяться на полную утилизацию возможностей реляционной теории риска с точки зрения разнообразия используемых алгебраических конструкций и их теоретико-игровых интерпретаций.

Предварительно введем ряд обозначений. Во-первых, введем понятие отображения f из множества A в реляционную систему $<B, \rho>$:

$$f: A \to \langle B, \rho \rangle \underset{Def}{\Leftrightarrow} f: A \to B, \rho \subseteq B \times B, \qquad (3)$$

где A и B – некоторые множества, ρ – отношение на множестве B. Во-вторых, через $\overline{z_1 z_2}$ будем обозначать терм, составленный из значений z_1 и z_2.

Итак, предположим, что в качестве участников проекта рассматриваются две космические сверхдержавы с разным уровнем развития технологий: первая – лидер, другая – аутсайдер. С теоретико-игровой точки зрения данная ситуация может быть формализована в форме игры в нормальной форме [8, 13]:

$$G = (Z_1, Z_2, u_1, u_2), \qquad (4)$$

где Z_1 – множество стратегий первого игрока,
Z_2 – множество стратегий второго игрока,
$u_1 : Z_1 \times Z_2 \to \langle R, \rho_1 \rangle$ – функция выигрыша первого игрока,
$u_2 : Z_1 \times Z_2 \to \langle R, \rho_2 \rangle$ – функция выигрыша второго игрока,
$R = \left\{ \overline{z_1 z_2} : z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2 \right\}$ – множество исходов игры,
ρ_1 – отношение предпочтения первого игрока на множестве R,
ρ_2 – отношение предпочтения второго игрока на множестве R.

Определим возможные стратегии игроков, см. табл. 1. Дополнительно будем предполагать, что выбор стратегии с кооперацией сразу обоими игроками означает совместную реализацию программы. При этом другие страны, не рассматриваемые в модели, могут участвовать в данной кооперации. Выбор второй стратегии одним участником игры означает реализацию проекта этим игроком в кооперации с рядом стран, за исключением другого игрока.

Таблица 1

Возможные стратегии игроков

Стратегия	Описание
1	Отсутствие у игрока амбициозных научных программ
2	Реализация проекта пилотируемого полета на Марс в рамках международной кооперации (с учетом выбора другого игрока)
3	Реализация проекта пилотируемого полета на Марс самостоятельно, без кооперации с другим игроком

Итак, пусть $Z_1 = \{1, 2, 3\}$, $Z_2 = \{1, 2, 3\}$. Также предположим, что специалисты в области политологии, экономики и научно-технической экспертизы представили порядки предпочтения для игроков: рис. 5 для первого и рис. 6 для второго. Приведенные на этих рисунках порядки выявлены по состоянию отрасли на начало 2010-х годов.

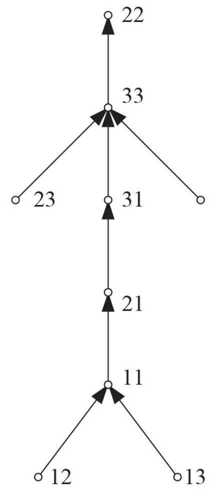

Рис. 5. Диаграмма Хассе порядка предпочтения для первого игрока

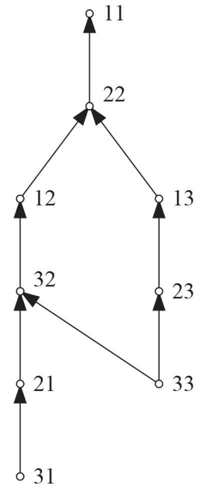

Рис. 6. Диаграмма Хассе порядка предпочтения для второго игрока

Обратим внимание, частичные порядки, представленные на рисунках 5 и 6, индуцируют на R две различные верхние полурешетки. С учетом определения (3) для кодоменов каррированных по аргументу другого игрока функций выигрыша справедливы следующие соотношения:

$$\mathrm{Cod}\left(u_1[z_2=1]\right) = \left\{ \begin{tikzcd} 31 \\ 21 \arrow[u] \\ 11 \arrow[u] \end{tikzcd} \right\}, \qquad (5)$$

$$\mathrm{Cod}\left(u_1[z_2=2]\right) = \left\{ \begin{tikzcd} & 22 & \\ 12 \arrow[ur] & & 32 \arrow[ul] \end{tikzcd} \right\}, \qquad (6)$$

$$\mathrm{Cod}\left(u_1[z_2=3]\right) = \left\{ \begin{tikzcd} & 33 & \\ 13 \arrow[ur] & & 23 \arrow[ul] \end{tikzcd} \right\}, \qquad (7)$$

$$\mathrm{Cod}\left(u_2[z_1=1]\right) = \left\{ \begin{tikzcd} & 11 & \\ 12 \arrow[ur] & & 13 \arrow[ul] \end{tikzcd} \right\}, \qquad (8)$$

$$\mathrm{Cod}\left(u_2[z_1=2]\right) = \left\{ \begin{tikzcd} & 22 & \\ 21 \arrow[ur] & & 23 \arrow[ul] \end{tikzcd} \right\}, \qquad (9)$$

$$\mathrm{Cod}\left(u_2[z_1=3]\right) = \left\{ \begin{tikzcd} & 32 & \\ 31 \arrow[ur] & & 33 \arrow[ul] \end{tikzcd} \right\}. \qquad (10)$$

В представлениях кодоменов (5)–(10) направленными линиями изображена диаграмма

Хассе для элементов соответствующих множеств. Легко заметить, что в случае (5) на кодомене индуцирован линейный порядок, а во всех остальных случаях – структура верхней полурешетки. Иначе, у каждого игрока есть риск выбора не лучшего решения.

При анализе моделей противостояния в нормальной форме современная теория игр предлагает целый ряд принципов оптимальности решений. Рассмотрим некоторые из них с точки зрения наличия лишь частичных порядков предпочтения на множестве *R*.

Исследование начнем со сравнения выбора одним игроком той или иной стратегии при всех возможных стратегиях другого игрока, см. таблицу 2. В таблице символом «?» обозначены случаи, когда исходы несравнимы друг с другом.

Таблица 2

Сравнение стратегий игроков

Сравнение стратегий первого игрока на основе порядка, см. рис. 5			Сравнение стратегий второго игрока на основе порядка, см. рис. 6		
1 и 2	1 и 3	2 и 3	1 и 2	1 и 3	2 и 3
11 ≤ 21	11 ≤ 31	21 ≤ 31	11 ≥ 12	11 ≥ 13	12 ? 13
12 ≤ 22	12 ? 32	22 ≥ 32	21 ≤ 22	21 ? 23	22 ≥ 23
13 ? 23	13 ≤ 33	23 ≤ 33	31 ≤ 32	31 ? 33	32 ≥ 33

Анализ данных таблицы позволяет сделать вывод о том, что в игре (4) отсутствуют доминируемые и доминирующие стратегии. Это означает, что все стратегии в игре (4) недоминируемые. Таким образом, принципы отбора доминирующих и исключения доминируемых стратегий в этой игровой ситуации не применимы.

Исследуем наличие у игроков осторожных стратегий. Будем искать такие стратегии, которые приносят игроку максимальный выигрыш при самом неблагоприятном выборе другого игрока. Анализ отношения предпочтения, представленного на рисунке 5, позволяет сделать вывод о том, что для первого игрока $\inf\limits_{z_2 \in Z_2} u_1(z_1, z_2)$ не существует при всех $z_1 \in Z_1$, следовательно, не существует $\sup\limits_{z_1 \in Z_1} \inf\limits_{z_2 \in Z_2} u_1(z_1, z_2)$, что означает отсутствие у первого игрока осторожных стратегий:

$$P_1(u_1) = \varnothing.$$

Анализ отношения предпочтения, представленного на рисунке 5, позволяет сделать вывод о том, что для второго игрока имеет место следующее равенство:

$$\sup_{z_2 \in Z_2} \inf_{z_1 \in Z_1} u_2(z_1, z_2) = u_2(3, 2),$$

то есть множество осторожных стратегий второго игрока состоит из одной стратегии:

$$P_2(u_2) = \{2\}.$$

Таким образом, мы выявили первый принцип оптимальности, которым может воспользоваться второй игрок. Это осторожное поведение. Принцип выбора осторожных стратегий особенно эффективен тогда, когда игрок не владеет информацией о функциях выигрыша других игроков. В этом случае игрок не может прогнозировать рациональное поведение остальных участников игры. В нашем случае риск нарушения этого принципа оптимальности означает реализацию риска получения худшего исхода в двух случаях, а именно при выборе первым игроком стратегий из множества {2, 3}, см. представления кодоменов (9) и (10). В случае если первый игрок выберет свою первую стратегию, то осторожный выбор второго игрока не является лучшим, см. соотношение (8), в то же время, это частный случай, допустимый в рамках осторожного поведения.

На следующем этапе предположим, что игрокам известны и свои, и чужие функции выигрыша. Какое рациональное поведение они могут выбрать в этом случае? Например, они могут построить для каждого игрока графики наилучших ответов на стратегии других игроков, найти пересечение этих графиков, если оно существует, и использовать свои стратегии, соответствующие точкам пересечения, как оптимальные, ожидая от других игроков того же. Важно, что никому из игроков не выгодно отклоняться от этих стратегий, так как эти стратегии – лучший ответ на стратегии остальных. Если один отклоняется, это не значит, что другие сделают тоже самое, тем более, что отклонение одного может быть кому-то выгодно. Эта ситуация носит название равновесие по Нэшу [8, 12, 13] и может быть использована в качестве принципа оптимальности. Построим графики наилучших ответов игроков для игры (4).

Для этой игры графики наилучших ответов первого $BR_1(u_1)$ и второго $BR_2(u_2)$ игроков можно описать следующим образом:

$$\overline{z_1 z_2} \in BR_1(u_1) \underset{Def}{\Leftrightarrow} u_1(z_1, z_2) = \sup_{z \in Z_1} u_1(z, z_2),$$

$$\overline{z_1 z_2} \in BR_2(u_2) \underset{Def}{\Leftrightarrow} u_2(z_1, z_2) = \sup_{z \in Z_2} u_2(z_1, z).$$

Легко проверить, что $BR_1(u_1) = \{31, 22, 33\}$, $BR_2(u_2) = \{11, 22, 32\}$. Используя этот факт, легко можно вычислить множество равновесий по Нэшу в игре (4):

$$NE(G) = BR_1(u_1) \cap BR_2(u_2) = 22.$$

Итак, согласно принципу оптимальности, основанному на концепции равновесия по Нэшу, обоим игрокам следует выбрать стратегию 2. Отклонение от этого равновесного состояния не выгодно ни одному из игроков. Получение более благоприятного исхода для одного из игроков возможно лишь в случае реализации события риска для противоположной стороны – ошибки при расчете/выборе стратегии.

Важно, что в рассмотренном примере формально речь идет о риске в условиях полной определенности. В условиях полной информированности СПР, по крайней мере теоретически, способен рассчитать свою оптимальную стратегию и придерживаться ее. Риск здесь связан не с природой явлений, а с потенциальной возможностью ошибок в деятельности СПР.

3. Обсуждение результатов

Рассмотренный пример демонстрирует возможность использования частичных порядков, заданных на множестве исходов игры, при принятии решений. При этом традиционные принципы оптимальности решений, такие как принципы отбора доминирующих и исключения доминируемых стратегий, равновесие в доминирующих стратегиях, осторожное поведение, равновесие по Нэшу, и т. д., и т. п. [8, 10, 13] находят свою интерпретацию в терминах частичных порядков. Наложение на эти конструкции соответствующих минимальных требований к отношениям порядка на множестве исходов игры делает игровые ситуации легко интерпретируемыми в терминах риска.

В целом, интерпретация риска, как множества исходов развития системы с заданным на этом множестве порядком предпочтения, образующем структуру полурешетки или семейства полурешеток, представляется весьма общей. Если оставить за пределами рассмотрения порядки на фактор-множествах, то единственным дальнейшим обобщением предлагаемого определения риска может стать переход от понятия классического отношения к отношению нечеткому. Иными словами, график отношения порядка можно рассматривать как нечеткое множество. Однако, содержательно, такой переход не дает принципиально новых интерпретаций. О риске все равно можно будет говорить лишь в случае, когда нечеткое отношение будет определять структуру полурешетки, пусть, например, на каком-то уровне порога значимости. Единственное, что дает концепция нечеткого отношения здесь – это некоторая параметризация, способная «облагородить» экспертные оценки.

Заключение

Основным результатом данной работы является формирование нового формального определения феномена «риск» в рамках так называемой реляционной теории риска, а также рассмотрение возможности прямого применения этой теории к исследованию риска в нечисловых экономиках.

Заметим, что реляционная концепция риска, как и любая теория, порождает свой понятийный аппарат, а также выполняет обобщающую и прогностическую функции.

Так тезарус реляционной теории риска, формируемый в рамках данной работы, включает терминологию, привлеченную из ряда прикладных и математических дисциплин. Это, например, такие термины, как «исход», «класс», «множество», «отношение», «отношение предпочтения», «отношение эквивалентности», «полурешетка», «порядок», «предпорядок», «реляционная система», «риск», «семейство», и т. п.

Обобщающая функция разрабатываемой теории может быть продемонстрирована в форме интерпретации определений риска, предлагаемых самыми разными источниками, исследующими феномен риска, в рамках определения, предлагаемого изложенной теорией. Однако, эта сторона реляционной теории риска не являлась непосредственным предметом исследования в данной работе.

И, наконец, прогностическая функция реляционной теории риска реализуется через конструктивный характер понимания риска в этой теории, позволяющий решать конкретные задачи анализа риска, например, в нечисловых экономиках.

Литература

1. Бородин А.В. Теоретико-игровые модели качественного анализа политик безопасности // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11. № 4. С. 765.

2. Бородин А.В. Феномен компьютерных вирусов: элементы теории и экономика существования. Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, 2004. 144 с.

3. Булинская Е.В. Теория риска и перестрахование. Часть 1. Упорядочивание рисков. М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2001. 119 с.

4. Виноградов О.П. Элементы теории риска. М.: ЛЕНАНД, 2019. 160 с.

5. Грушо А.А., Тимонина Е.Е. Теоретические основы компьютерной безопасности. М.: Яхтсмен, 1996. 192 с.

6. Дубров А.М., Лагоша Б.Н., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. М.: Финансы и статистика, 2003. 223 с.

7. Иваницкий А. Ю. Теория риска в страховании. М.: МЦНМО, 2013. 136 с.

8. Колесник Г.В. Теория игр. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2017. 152 с.

9. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.

Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007. 544 с.

10. Лабскер Л.Г., Ященко Н.А. Теория игр в экономике (практикум с решениями задач). М.: КНОРУС, 2017. 264 с.

11. Литовских А.М. Финансовый менеджмент. Таганрог: Издательство ТРТУ, 2008. 238 с.

12. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения. СПб.: Лань, 2016. 448 с.

13. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985. 200 с.

14. Найт Ф.Х. Риск, неопределенность и прибыль. М.: Дело, 2003. 360 с.

15. Новоселов А.А. Математическое моделирование финансовых рисков: теория измерения. Новосибирск: Наука, 2001. 102 с.

16. Новоселов А.А. Неприятие риска в нелинейных моделях принятия решений // Труды II Всероссийской конференции «Финансово-актуарная математика и смежные вопросы». Ч. 1. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2003. С. 157–164.

17. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М.: Инфра-М, 1994. 192 с.

18. Савина Т.Ф. Гомоморфизмы и конгруэнции игр с отношениями предпочтения. Дисс на соиск. уч. степени к. ф.-м. н. Саратов: Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 2011. 139 с.

19. Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. Теория ожидаемого эффекта. М.: Наука, 2002. 182 с.

20. Тихомиров Н.П., Тихомирова Т. М. Теория риска. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2020. 308 с.

21. Уразаева Т.А. Алгебраические методы анализа риска в развивающихся экономиках. Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2017. 276 с.

22. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. М.: Техносфера, 2005. 400 с.

23. Хохлов Н.В. Управление риском. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 239 с.

24. Шапкин А.С., Шапкин В.А. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и Ко», 2009. 544 с.

25. Boholm A., Corvellec H. A relational theory of risk // Journal of Risk Research. 2011. Vol. 14. Iss. 2. P. 175–190.

26. Davey B.A., Priestley H.A. Introduction to lattices and order. New York: Cambridge university press, 2002. 314 p.

27. McNeil A.J., Frey R., Embrechts P. Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools – Revised Edition. New Jersey: Princeton University Press, 2005. 538 p.

28. Schmidli H. Risk Theory. Cham: Springer, 2017. 242 p.

References

1. Borodin A.V. Game-theoretic models of qualitative analysis of security policies. Obozreniye prikladnoy i promyshlennoy matematiki = Review of applied and industrial mathematics. 2004; 11; 4: 765. (In Russ.)

2. Borodin A.V. Fenomen komp'yuternykh virusov: elementy teorii i ekonomika sushchestvovaniya = Phenomenon of computer viruses: theory elements and economics of existence. Yoshkar-Ola: Mari State Technical University; 2004. 144 p. (In Russ.)

3. Bulinskaya Ye.V. Teoriya riska i perestrakhovaniye. Chast' 1. Uporyadochivaniye riskov = Risk theory and reinsurance. Part 1. Risks ordering. Moscow: Publishing house of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow State University; 2001. 119 p. (In Russ.)

4. Vinogradov O.P. Elementy teorii riska = Elements of the theory of risk. Moscow: LENAND; 2019. 160 p. (In Russ.)

5. Grusho A.A., Timonina Ye.Ye. Teoreticheskiye osnovy komp'yuternoy bezopasnosti = Theoretical foundations of computer security. Moscow: Yakhtsman; 1996. 192 p. (In Russ.)

6. Dubrov A.M., Lagosha B.N., Khrustalev Ye.Yu. Modelirovaniye riskovykh situatsiy v ekonomike i biznese = Modeling of risk situations in economics and business. Moscow: Finance and Statistics; 2003. 223 p. (In Russ.)

7. Ivanitskiy A.Yu. Teoriya riska v strakhovanii = Theory of risk in insurance. Moscow: MTsNMO; 2013. 136 p. (In Russ.)

8. Kolesnik G.V. Teoriya igr = Theory of games. Moscow: Book House «LIBROKOM»; 2017. 152 p. (In Russ.)

9. Korolev V.Yu., Bening V.Ye., Shorgin S.Ya. Matematicheskiye osnovy teorii riska = Mathematical foundations of risk theory. Moscow: Fizmatlit; 2007. 544 p. (In Russ.)

10. Labsker L.G., Yashchenko N.A. Teoriya igr v ekonomike (praktikum s resheniyami zadach) = Game theory in economics (workshop with problem solutions). Moscow: KNORUS; 2017. 264 p. (In Russ.)

11. Litovskikh A.M. Finansovyy menedzhment = Financial management. Taganrog: Publishing house TRTU; 2008. 238 p. (In Russ.)

12. Mazalov V.V. Matematicheskaya teoriya igr i prilozheniya = Mathematical theory of games and applications. Saint Petersburg: Lan; 2016. 448 p. (In Russ.)

13. Mulen E. Teoriya igr s primerami iz matematicheskoy ekonomiki = Game theory with examples from mathematical economics. Moscow: Mir; 1985. 200 p. (In Russ.)

14. Nayt F.Kh. Risk, neopredelennost' i pribyl' = Risk, uncertainty and profit. Moscow: Delo; 2003. 360 p. (In Russ.)

15. Novoselov A.A. Matematicheskoye modelirovaniye finansovykh riskov: teoriya izmereniya

= Mathematical modeling of financial risks: measurement theory. Novosibirsk: Nauka; 2001. 102 p. (In Russ.)

16. Novoselov A. A. Risk aversion in nonlinear decision making models. Trudy II Vserossiyskoy konferentsii «Finansovo-aktuarnaya matematika i smezhnyye voprosy». CH. 1 = Proceedings of the II All-Russian conference «Financial actuarial mathematics and related issues». Part 1. Krasnoyarsk: ICM SO RAN; 2003: 157-164. (In Russ.)

17. Pervozvanskiy A.A., Pervozvanskaya T.N. Finansovyy rynok: raschet i risk = Financial market: calculation and risk. Moscow: Infra-M; 1994. 192 p. (In Russ.)

18. Savina T.F. Gomomorfizmy i kongruentsii igr s otnosheniyami predpochteniya. Diss. na soisk. uch. stepeni k. f.-m. n. = Homomorphisms and congruences of games with preference relations. Diss. for a job. uch. degree Ph.D. n. Saratov: Saratov State University. N.G. Chernyshevsky; 2011. 139 p. (In Russ.)

19. Smolyak S.A. Otsenka effektivnosti investitsionnykh proyektov v usloviyakh riska i neopredelennosti. Teoriya ozhidayemogo effekta = Evaluation of the efficiency of investment projects in conditions of risk and uncertainty. Theory of the expected effect. Moscow: Nauka; 2002. 182 p. (In Russ.)

20. Tikhomirov N.P., Tikhomirova T.M. Teoriya riska = The theory of risk. Moscow: UNITY-DANA; 2020. 308 p. (In Russ.)

21. Urazayeva T.A. Algebraicheskiye metody analiza riska v razvivayushchikhsya ekonomikakh. = Algebraic methods of risk analysis in developing economies Yoshkar-Ola: Volga State Technological University; 2017. 276 p. (In Russ.)

22. Khaggarti R. Diskretnaya matematika dlya programmistov = Discrete mathematics for programmers. Moscow: Tekhnosfera; 2005. 400 p. (In Russ.)

23. Khokhlov N.V. Upravleniye riskom = Risk management. Moscow: UNITI-DANA; 2001. 239 p. (In Russ.)

24. Shapkin A.S., Shapkin V.A. Ekonomicheskiye i finansovyye riski. Otsenka, upravleniye, portfel' investitsiy = Economic and financial risks. Valuation, management, portfolio of investments. Moscow: Izdatel'sko-torgovaya korporatsiya «Dashkov i Ko» = Publishing and trade corporation «Dashkov and Co»; 2009. 544 p. (In Russ.)

25. Boholm A., Corvellec H. A relational theory of risk. Journal of Risk Research. 2011; 14(2): 175-190.

26. Davey B.A., Priestley H.A. Introduction to lattices and order. New York: Cambridge university press; 2002. 314 p.

27. McNeil A.J., Frey R., Embrechts P. Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools - Revised Edition. New Jersey: Princeton University Press; 2005. 538 p.

28. Schmidli H. Risk Theory. Cham: Springer; 2017. 242 p.

Сведения об авторе

Татьяна Альфредовна Уразаева
К.э.н., доцент, заведующий кафедрой информационных систем в экономике
Поволжский государственный технологический университет, Йошкар-Ола, Россия
Эл. почта: urazaevata@volgatech.net

Information about the author

Tatiana A. Urazaeva
Cand. Sci. (Economics), Associate Professor, Head of the Department of Information Systems in Economics
Volga State University of Technology,
Yoshkar-Ola, Russia
E-mail: urazaevata@volgatech.net