УДК 336.7.(470.345)
DOI: http://dx.doi.org/10.21686/2500-3925-2020-6-64-72

В.А. Горелик[1, 2], Т.В. Золотова[3]

[1]Вычислительный центр им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
[2]Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия
[3]Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия

Использование статистических оценок в игре с природой как модели инвестирования

Цель исследования. *Цель исследования состоит в разработке новых принципов принятия решений (принципов оптимальности) в играх с природой и их применении для анализа статистических данных и выбора стратегий фондового инвестирования.*
Материалы и методы. *В статье проведен анализ российской и зарубежной библиографии по проблеме исследования. Предложена модель принятия решений в игре с природой с известными вероятностями состояний. В качестве оценки эффективности принимается математическое ожидание выигрыша игрока, а в качестве оценки риска – среднеквадратическое отклонение или дисперсия. Эта двухкритериальная задача формализуется путем перевода оценки эффективности в ограничение. В результате для случая смешанных стратегий возникает нелинейная (квадратичная) задача математического программирования. Для ее решения применяется подход, основанный на использовании функции Лагранжа и условий оптимальности Каруша-Куна-Таккера. В качестве приложения полученных методов рассматриваются задачи фондового инвестирования.*
Результаты. *Получены аналитические методы решения указанной оптимизационной задачи и алгоритм поиска оптимальных смешанных стратегий. Приведены практические примеры применения предложенного подхода на реальных статистических данных. В качестве исходных данных в настоящем исследовании послужили котировки акций российских компаний электроэнергетической отрасли за период с 01.07.2020 по 01.10.2020, взятые с сайта Инвестиционной компании «ФИНАМ». Разработанный метод позволяет находить по формулам оптимальную стратегию и соответствующие ей значения доходности и риска на основе только исходных данных (статистических характеристик финансовых инструментов и порогового значения доходности), т.е. дает, на наш взгляд, удобный инструмент анализа для инвестора.*
Заключение. *Понятие принципа оптимальности в задачах принятия решений в условиях неполной информации является весьма неоднозначным. Лицо, принимающее решение, должно иметь возможность выбирать из спектра моделей принятия решений, отражающих зависимость вида рационального поведения от имеющейся информации и его отношения к риску. В работе предложена модель такого типа для случая вероятностной неопределенности, которая приводит к задаче минимизации дисперсии как оценки риска при ограничении снизу на математическое ожидание как оценки эффективности.*

Ключевые слова: *управление риском, принцип оптимальности, двухкритериальный подход, математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение.*

Victor A. Gorelik[1, 2], Zolotova Tatiana Valerianovna[3]

[1]Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Russia
[2]Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia
[3]Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia

Using Statistical Estimates in the Game with Nature as an Investment Model

Purpose of the study. *The aim of the research is to develop new principles of decision making (principles of optimality) in games with nature and their application to analyze statistical data and choose strategies for stock investment.*
Materials and methods. *We analyze Russian and foreign bibliography on the research problem. A model of decision making in a game with nature with known state probabilities is proposed. The mathematical expectation of the player's payoff is taken as an assessment of efficiency, and the standard deviation or variance is taken as a risk assessment. This two-criterion task is formalized by transferring the efficiency assessment into a constraint. As a result, for the case of mixed strategies, a nonlinear (quadratic) task of mathematical programming arises. To solve it, an approach based on the Lagrange function and the Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions is used. As an application of the methods obtained, the problems of stock investment are considered.*
Results. *Analytical methods for solving the indicated optimization problem and an algorithm for finding optimal mixed strategies are obtained. Practical examples of application of the proposed approach on real statistical data are given. As the initial data in this study, we used stock quotes of Russian companies in the electric power industry for the period from 01.07.2020 to 01.10.2020, taken from the website of the FINAM Investment Company. The developed method allows one to find the optimal strategy and the corresponding values of profitability and risk based on only the initial data (statistical characteristics of financial instruments and the threshold value of profitability), i.e. provides, in our opinion, a convenient analysis tool for the investor.*
Conclusion. *The concept of the principle of optimality in decision making problems under conditions of incomplete information is very ambiguous. The decision maker should be able to choose from a range of decision making models that reflect the dependence of the type of rational behavior on the available information and the attitude to risk. The paper proposes a model of this type for the case of probabilistic uncertainty, which leads to the problem of minimizing variance as a risk assessment with a lower bound on the mathematical expectation as an assessment of efficiency.*

Keywords: *risk management, principle of optimality, two-criterion approach, mathematical expectation, standard deviation.*

Введение

Процесс принятия решений в условиях неполной информации можно формализовать как «игру с природой». Учет неопределенности и нейтрализация связанных с ней потерь при выборе решения называется управлением риском. При этом в зависимости от имеющейся у лица принимающего решение (ЛПР) информации о состояниях природы и его отношения к риску необходимо определить принцип оптимальности, т.е. отображение множества всех стратегий в некоторое его подмножество. Случай вероятностной неопределенности, когда имеется информация о вероятностях состояния природы, будем называть принятием решений в стохастических условиях.

Авторы многих работ по принятию решений (см., например, [11, 12, 16, 18, 20]) предлагают ЛПР использовать для анализа экономических задач только один из известных в теории игр с природой критериев эффективности: Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Байеса. При таком подходе, с одной стороны, получается решение в чистых стратегиях, что не всегда соответствует предпочтениям ЛПР, а, с другой стороны, не учитывает риск, как одну из важных составляющих моделирования экономической ситуации. Как известно, критерии Вальда, Гурвица, Байеса предполагают максимизацию только значение выигрыша, а критерий Сэвиджа – минимизацию потерь.

Применение математических методов при принятии решений с учетом риска также рассматривалось рядом авторов (см., например, [1–7, 9, 10, 13–15, 17, 19, 21–23]). Остановимся на некоторых работах, в которых аппарат теории «игр с природой» описывает оптимизационные модели управления риском. В работе [5] экономические задачи управления риском решаются на основе использования линейной свертки критериев Вальда и Сэвиджа. В статье [3] предлагается принцип гарантированного результата (принцип минимакса), а также оценка риска по Сэвиджу в задачах нахождения оптимальной стратегии с учетом риска. В статье [2] излагался двухкритериальный подход «эффективность – риск» к определению принципа оптимальности при принятии решений в стохастических условиях. В качестве оценки эффективности использовалось математическое ожидание выигрыша, а в качестве оценки риска – функция VAR. Эта функция определяется как вероятность события, при котором выигрыш ЛПР не больше некоторого порогового значения, выступающего в качестве аргумента. Функция VAR и дисперсия являются наиболее широко используемыми величинами в качестве оценки риска (см, например, [9, 10, 13–15, 17, 19, 21–23]). В данной работе мы используем среднеквадратическое отклонение (СКО) и дисперсию.

Пусть ЛПР имеет возможность выбрать одну из стратегий (альтернатив) $i = 1, ..., n$, при известном наборе возможных вариантов состояний внешней среды (природы) $j = 1, ..., m$. Выигрыш от i-го решения при j-м состоянии внешней среды есть a_{ij}. Например, в задачах фондового инвестирования это могут быть доходности финансовых инструментов при различных сценариях развития. Матрица выигрышей от реализации возможных решений есть $A = \|a_{ij}\|$. Зная вероятности состояний природы q_j, ЛПР выбирает стратегию, которая приведет по возможности к наибольшему выигрышу и к как можно меньшим потерям вследствие неоднозначности исхода из-за неполноты информации. Эти критерии, как правило, противоречивы – чем более эффективен способ инвестиций, тем он более рискован. Поэтому выбор принципа оптимальности основан на некотором компромиссе между ними.

Минимизация риска с ограничением по доходности

Итак, в качестве оценки эффективности стратегии i примем математическое ожидание выигрыша $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j$, а в качестве оценки риска – СКО $\sigma_i = (\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - \bar{a}_i)^2 q_j)^{0.5}$.

Рассмотрим постановку задачи двухкритериальной оптимизации, в которой функция математического ожидания выигрыша переведена в ограничение с нижним пороговым значением a_0. В чистых стратегиях получаем задачу

$$\sigma_i \to \min_{i \in I}, \quad I = \{i \,|\, \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \ge a_0\}. \qquad (1)$$

Смешанная стратегия в задаче инвестирования может интерпретироваться как распределение средств в разные финансовые инструменты. Как показывают расчеты на реальных данных российского фондового рынка, в частности, рассматриваемый далее пример, случайные значения доходностей финансовых инструментов слабо коррелированы. Поэтому в данной работе мы будем предполагать, что такая коррелированность отсутствует или ею можно пренебречь. Заметим, что полученные далее результаты могут быть обобщены на случай учета коррелированности случайных доходностей.

Обозначим через p_i долю средств, вкладываемых в i-й финансовый инструмент. Величины a_{ij} будем интерпретировать как доходности финансовых инструментов при соответствующих состояниях природы (экономических ситуациях). Тогда математическое ожидание доходности стратегии $p = (p_1, ..., p_n)$ – портфеля инвестора, есть $\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_i p_i$, а СКО случайной величины доходности при отсутствии коррелированности определяется по формуле $\sigma = (\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 p_i^2)^{0.5}$.

Постановка задачи на минимум СКО при ограничении снизу на математическое ожидание доходности в смешанных стратегиях имеет вид

$$(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 p_i^2)^{0.5} \to \min_{p\in S},$$

$$S = \{p \mid \sum_{i=1}^{n}\overline{a}_i p_i \ge a_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \ge 0, i = 1,...,n\}. \qquad (2)$$

Изложим метод нахождения оптимальных истинно смешанных (содержащих не менее двух ненулевых компонент) стратегий. В дальнейшем будем считать, что все $\overline{a}_i$ различны. Если две стратегии имеют одинаковые математические ожидания доходности, то при равенстве СКО они эквивалентны и одну из них можно исключить, а когда одна из них имеет большее СКО, то она не может входить в оптимальную стратегию.

При $a_0 \le \max_{1\le i\le n}\overline{a}_i$ множество S непусто, замкнуто и ограничено, поэтому задача (2) имеет решение. Так как при возведении в квадрат целевой функции решение не меняется, то функцию Лагранжа для задачи (2) можно представить в виде

$$L(p,\lambda,\mu) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 p_i^2 + \lambda(a_0 - \sum_{i=1}^{n}\overline{a}_i p_i) - \mu(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1),$$

$$\lambda \ge 0.$$

Для ненулевых компонент p_i условия оптимальности имеют вид $\sigma_i^2 p_i - \lambda\overline{a}_i - \mu = 0$, $i \in I_0$. Отсюда $p_i = \dfrac{\lambda\overline{a}_i + \mu}{\sigma_i^2}$.

Если первое ограничение в задаче (2) является существенным (активным на оптимальном решении), то имеем два линейных уравнения $\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_i p_i = a_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Подставляя выражение для p_i в эти уравнения, получаем систему уравнений для нахождения λ и μ:

$$\lambda k_1 + \mu k_2 = a_0,\ \lambda k_2 + \mu k_3 = 1, \qquad (3)$$

где k_1, k_2, k_3 – величины, выражающиеся через исходные данные задачи (2):

$$k_1 = \sum_{i\in I_0}\frac{\overline{a}_i^2}{\sigma_i^2},\ k_2 = \sum_{i\in I_0}\frac{\overline{a}_i}{\sigma_i^2},\ k_3 = \sum_{i\in I_0}\frac{1}{\sigma_i^2}. \qquad (4)$$

Покажем, что имеет место $k_1k_3 - k_2^2 > 0\ \forall I_0$, содержащего хотя бы два индекса. Для этого воспользуемся неравенством Коши-Буняковского: $\langle x, y\rangle^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$. Введем вектора x и y с компонентами $x_i = \dfrac{\overline{a}_i}{\sigma_i}$, $y_i = \dfrac{1}{\sigma_i}$, $i \in I_0$. Тогда $\|x\|^2 = k_1$, $\|y\|^2 = k_3$, $\langle x, y\rangle = k_2$ и $k_1k_3 - k_2^2 \ge 0$. На самом деле в неравенстве Коши-Буняковского имеет место равенство только в случае коллинеарности векторов x и y. По предположению все $\overline{a}_i$ различны и векторы с компонентами $x_i = \dfrac{\overline{a}_i}{\sigma_i}$ и $y_i = \dfrac{1}{\sigma_i}$ не являются коллинеарными. Значит, при наличии не менее двух компонент у этих векторов выражение $k_1k_3 - k_2^2$ является положительным. Поэтому определитель системы (3) строго больше нуля, и система имеет решение $\lambda = \dfrac{k_3a_0 - k_2}{k_1k_3 - k_2^2}$, $\mu = \dfrac{k_1 - k_2a_0}{k_1k_3 - k_2^2}$. При этом в силу условий ККТ должно выполняться $\lambda \ge 0$ (если λ отрицательно, то условия не выполнены и этот случай отбрасывается).

Тогда имеем следующие формулы для нахождения решения задачи (2):

$$\lambda^0 = \frac{k_3a_0 - k_2}{k_1k_3 - k_2^2},\ \mu^0 = \frac{k_1 - k_2a_0}{k_1k_3 - k_2^2},\ p_i^0 = \frac{\lambda^0\overline{a}_i + \mu^0}{\sigma_i^2},\ i \in I_0,$$

$$p_i^0 = 0,\ i \notin I_0. \qquad (5)$$

Формулы (5) справедливы как при $\lambda^0 > 0$, так и при $\lambda^0 = 0$. Последний (вырожденный) случай имеет место при $k_3a_0 - k_2 = 0$. Тогда $\mu^0 = \dfrac{k_1 - k_2a_0}{k_1k_3 - k_2^2} = \dfrac{k_1k_3 - k_2^2}{(k_1k_3 - k_2^2)k_3} = \dfrac{1}{k_3}$. Если же первое ограничение в задаче (2) не является активным, то $\lambda^0 = 0$, а $\mu^0 = \dfrac{1}{k_3}$ из второго уравнения. В любом случае при $\lambda^0 = 0$ имеют место формулы $p_i^0 = \dfrac{\mu^0}{\sigma_i^2} = \dfrac{1}{k_3\sigma_i^2}$. Учитывая выражение для k_3, имеем $p_i^0 = (\sigma_i^2\sum_{i\in I_0}\dfrac{1}{\sigma_i^2})^{-1}$, что соответствует известным в финансовой математике формулам для портфеля минимального риска.

Определим доходность портфеля минимального риска: $a_{\min} = (\sum_{i\in I_0}\dfrac{1}{\sigma_i^2})^{-1}\sum_{i\in I_0}\dfrac{a_i}{\sigma_i^2}$. Тогда при $a \le a_{\min}$ решением задачи (2) является портфель минимального риска, а при $a > a_{\min}$ ограничение по доходности является активным, и решение находится по формулам (5).

Алгоритм нахождения решения задачи (2) включает перебор множеств ненулевых компонент I_0. Так как для задачи выпуклого программирования (2) условия оптимальности ККТ являются и достаточными, то если появляется удовлетворяющее им решение (с учетом условия неотрицательности производных в нуле, которое имеет вид $\lambda^0\overline{a}_i + \mu^0 \le 0$, $i \notin I_0$, а также условий $\lambda^0 \ge 0$ и $p_i^0 \ge 0$, $i \in I_0$), оно оптимально. В реальных задачах инвестирования число стратегий (видов финансовых инструментов) редко превышает 8–10 и решение находится весьма быстро. Перебор имеет смысл начинать с множества всех индексов $I = \{1, ..., n\}$, затем отбрасывать по одному и т.д., что позволяет построить дерево с вершинами, соответствующими различным I_0, и использовать метод ветвей и границ.

Пример нахождения стратегии инвестирования в акции российских компаний электроэнергетической отрасли

Инвесторы, принимая решение на фондовом рынке, прогнозируют будущие цены (или доходности) финансовых инструментов. В свою очередь при прогнозировании будущих доходностей можно использовать фундаментальный или технический анализ. Фундаментальный анализ основан на исследовании закономерностей, которые определяют стратегию в долгосрочной перспективе, а технический анализ предполагает исследование предыдущих значений показателей финансовых инструментов (например, доходностей) для краткосрочных или среднесрочных сделок [7].

Технический анализ предполагает следующую процедуру обработки информации. Если имеются статистические данные для каждого актива, то в матрице выигрышей каждой строке будет соответствовать набор статистических значений доходностей. Состояниями природы здесь являются моменты времени, вероятность каждого состояния есть $1/m$, где m – длина временного ряда (количество моментов времени) для каждого актива. Несмещенная оценка для математического ожидания определяется по формуле $\overline{a}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$, а несмещенная оценка для СКО – по формуле $\sigma_i = \left(\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{ij} - \overline{a}_i\right)^2\right)^{0,5}$.

Проведем технический анализ и найдем оптимальную стратегию инвестирования, используя реальные данные о котировках акций российских компаний за период с 01.07.2020 по 01.10.2020. Были выбраны четыре относительно успешные компании электроэнергетической отрасли, а именно, ОАО «ЛЭСК» («Липецкая энергосбытовая компания», LPSB), ОАО «Самараэнерго» (SAGO), ПАО «Федеральная гидрогенерирующая компания – РусГидро» (HYDR), ПАО «Якутскэнерго» (YKENP). На рис. 1 приведены значения цен закрытия акций всех рассматриваемых компаний за указанный период, экспортированных в файл Excel (данные взяты с сайта Инвестиционной компании «ФИНАМ» [8]). На основании данных о еженедельных ценах закрытия рассчитаны ежедневные значения доходностей компаний, средние значения доходностей, дисперсии, СКО и ковариации за данный период (см. рис. 1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		LPSB	SAGO	HYDR	YKENP		LPSB	SAGO	HYDR	YKENP
2	<DATE>	<CLOSE>	<CLOSE>	<CLOSE>	<CLOSE>			**доходности акций**		
3	20200702	7,55	0,44	0,7672	0,346		0,033113	-0,00909	0,009515	0,00578
4	20200703	7,8	0,436	0,7745	0,348		0	-0,01376	0,006198	-0,00287
5	20200706	7,8	0,43	0,7793	0,347		-0,00641	0,018605	-0,02926	-0,02017
6	20200707	7,75	0,438	0,7565	0,34		0,012903	0,004566	0,025777	0
7	20200708	7,85	0,44	0,776	0,34		-0,01274	-0,03182	-0,02062	-0,01765
8	20200709	7,75	0,426	0,76	0,334		-0,00645	0,018779	0,008158	0,017964
9	20200710	7,7	0,434	0,7662	0,34		0,006494	0	-0,01423	-0,025
10	20200713	7,75	0,434	0,7553	0,3315		-0,01935	-0,00922	0,004502	-0,00603
66	20200930	8	0,562	0,7609	0,4		0	0,007117	0,005914	-0,03
67	20201001	8	0,566	0,7654	0,388					
68										
69							***LPSB***	***SAGO***	***HYDR***	***YKENP***
70						**мат.ож**	0,001086	0,005312	5,15E-05	0,002256
71						**дисп**	0,000377	0,003302	0,00018	0,00097
72						**ско**	0,019406	0,057467	0,01342	0,031149
73								***SAGO***	***HYDR***	***YKENP***
74						**ковар**	***LPSB***	-6,5E-05	8,51E-06	1,93E-05
75							***SAGO***		3,29E-05	0,000288
76							***HYDR***			6,76E-05

Рис. 1. Котировки акций компаний ЛЭСК, Самараэнерго, РусГидро, Якутскэнерго и их статистические характеристики

Стратегия 1 – вложение в акции компании ЛЭСК, стратегия 2 – вложение в акции компании Самараэнерго, стратегия 3 – вложение в акции компании РусГидро, стратегия 4 – вложение в акции компании Якутскэнерго. Средние значения доходностей при этом равны $\overline{a}_1 = 0.00109$ (0.109%), $\overline{a}_2 = 0.00531$ (0.531%), $\overline{a}_3 = 0.00005$ (0.005%) и $\overline{a}_4 = 0.00226$ (0.226%), дисперсии равны $\sigma_1^2 = 0.00038$, $\sigma_2^2 = 0.00330$, $\sigma_3^2 = 0.00018$ и $\sigma_4^2 = 0.00097$. При этом все ковариационные моменты за исключением одного принимают значения порядка 10^{-5} – 10^{-6}, поэтому ими можно пренебречь. Ковариация доходностей акций компаний Самараэнерго и Якутскэнерго равна 0.00028, что на порядок меньше дисперсии доходности компании Самараэнерго 0.00330 и, с учетом округления до четвертого знака, на порядок меньше дисперсии доходности компании Якутскэнерго 0.00097. Поэтому и этой ковариацией можно пренебречь.

Пусть в задаче (1) $a_0 = 0.002$ (0.2%). Ограничения задачи (1) выполняются для стратегий 2 и 4, и решением в чистых стратегиях является вложение в акции компании Якутскэнерго.

Решим задачу (2) в смешанных стратегиях при том же пороговом значении доходности $a_0 = 0.002$. Для этих данных задача имеет вид

$$0.00038p_1^2 + 0.00330p_2^2 + 0.00018p_3^2 + 0.00097p_4^2 \to \min_p,$$

$$0.00109p_1 + 0.00531p_2 + 0.00005p_3 + 0.00226p_4 \ge 0.002,$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Приведем для наглядности подробную процедуру решения этой задачи с использованием формул (4) и (5). Возьмем $I_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, тогда по формулам (4)

$$k_1 = \sum_{i \in I_0} \frac{\overline{a}_i^2}{\sigma_i^2} = \frac{0.00109^2}{0.00038} + \frac{0.00531^2}{0.00330} + \frac{0.00005^2}{0.00018} + \frac{0.00226^2}{0.00226} = 0.011694,$$

$$k_2 = \sum_{i \in I_0} \frac{\overline{a}_i}{\sigma_i^2} = \frac{0.00109}{0.00038} + \frac{0.00531}{0.00330} + \frac{0.00005}{0.00018} + \frac{0.00226}{0.00226} = 7.10245,$$

$$k_3 = \sum_{i \in I_0} \frac{1}{\sigma_i^2} = \frac{1}{0.00038} + \frac{1}{0.00330} + \frac{1}{0.00018} + $$
$$+ \frac{1}{0.00226} = 9541.71. \qquad .$$

При этом условие $k_1k_2 - k_2^2 > 0$ выполняется: $0.01694 \cdot 9541.71 - 7.10245^2 = 111.1424$. Используя формулы (5), имеем

$$\lambda^0 = \frac{k_3 a_0 - k_2}{k_1 k_3 - k_2^2} = \frac{9541.71 \cdot 0.002 - 7.10245}{111,1424} = 0.10780,$$

$$\mu^0 = \frac{k_1 - k_2 a_0}{k_1 k_3 - k_2^2} = \frac{0.01694 - 7.10245 \cdot 0.002}{111,1424} = 0.00003,$$

а компоненты оптимальной смешанной стратегии инвестирования есть

$$p_1^0 = \frac{\lambda^0 \overline{a}_1 + \mu^0}{\sigma_1^2} = \frac{0.10780 \cdot 0.00109 + 0.00003}{0.00038} = 0.37599,$$

$$p_2^0 = \frac{\lambda^0 \overline{a}_2 + \mu^0}{\sigma_2^2} = \frac{0.10780 \cdot 0.00531 + 0.00003}{0.00330} = 0.18082,$$

$$p_3^0 = \frac{\lambda^0 \overline{a}_3 + \mu^0}{\sigma_3^2} = \frac{0.10780 \cdot 0.00005 + 0.00003}{0.00018} = 0.16719,$$

$$p_4^0 = \frac{\lambda^0 \overline{a}_4 + \mu^0}{\sigma_4^2} = \frac{0.10780 \cdot 0.00226 + 0.00003}{0.00097} = 0.27510.$$

При этом целевая функция в оптимальной точке принимает значение 0.00024. Таким образом, решением является вложение в акции всех четырех компаний.

Решим задачу (1) с математическим ожиданием в ограничении, в котором пороговое значение равно $a_0 = 0.003$ (0.3%). Тогда ограничение задачи выполняется для стратегии 2. Поэтому решением в чистых стратегиях является вложение в акции компании Самараэнерго.

Решим задачу (2) в смешанных стратегиях при том же пороговом среднем значении доходности равным $a_0 = 0.003$. Возьмем $I_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, тогда величины, рассчитываемые по формулам (4), имеют те же значения: $k_1 = 0.01694$, $k_2 = 7.10245$, $k_3 = 9541.71$. Произведем теперь расчеты, используя формулы (5):

$$\lambda = \frac{9541.71 \cdot 0.003 - 7.10245}{111,1424} = 0.19365,$$

$$\mu = \frac{0.01694 - 7.10245 \cdot 0.003}{111,1424} = -0.00004,$$

$$p_1 = \frac{0.19365 \cdot 0.00109 - 0.00004}{0.00038} = 0.45379,$$

$$p_2 = \frac{0.19365 \cdot 0.00531 - 0.00004}{0.00330} = 0.29955,$$

$$p_3 = \frac{0.19365 \cdot 0.00005 - 0.00004}{0.00018} = -0.16312,$$

$$p_4 = \frac{0.19365 \cdot 0.00226 - 0.00004}{0.00097} = 0.40978.$$

Условие неотрицательности $p_i^0 \geq 0$, $i \in I_0$, в данном случае не выполняется, значит, данный вектор p решением не является. Так как при этом p_3 отрицательное, то можно предположить, что оптимальная смешанная стратегия содержит третью нулевую компоненту. Поэтому возьмем $I_0 = \{1, 2, 4\}$, тогда

$$k_1 = \frac{0.00109^2}{0.00038} + \frac{0.00531^2}{0.00330} + \frac{0.00226^2}{0.00226} = 0.01692,$$

$$k_2 = \frac{0.00109}{0.00038} + \frac{0.00531}{0.00330} + \frac{0.00226}{0.00226} = 6.81673,$$

$$k_3 = \frac{1}{0.00038} + \frac{1}{0.00330} + \frac{1}{0.00226} = 3988.952,$$

$k_1k_2 - k_2^2 = 21.02581 > 0$, и по формулам (5) имеем

$$\lambda^0 = \frac{3988.952 \cdot 0.003 - 6.816727}{21,02581} = 0.24494,$$

$$\mu^0 = \frac{0.01692 - 6.816727 \cdot 0.003}{21,02581} = -0.00017,$$

$p_1^0 = 0.26030$, $p_2^0 = 0.34313$, $p_3^0 = 0$, $p_4^0 = 0.39658$.

Условие $\lambda^0 \overline{a}_3 + \mu^0 \leq 0$ для отброшенной третьей стратегии (вложение в акции компании РусГидро) выполняется:

$$\lambda^0 \overline{a}_3 + \mu^0 = 0.24494 \cdot 0.00005 - 0.00017 = -0.00016.$$

Так как условия оптимальности для задачи (2) являются необходимыми и достаточными, то дальнейший перебор подмножеств множества индексов не требуется, и решением является вложение в акции компаний ЛЭСК, Самараэнерго и Якутскэнерго. Значение целевой функции в оптимальной точке равно 0.00057.

Решение задачи (1) с пороговым значением математического ожидания равным $a_0 = 0.004$ (0.4%) совпадает с решением для $a_0 = 0.003$, т.е. решением в чистых стратегиях является вложение в акции компании Самараэнерго.

Решим задачу (2) в смешанных стратегиях при пороговом среднем значении доходности равным $a_0 = 0.004$. Возьмем $I_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, тогда величины, рассчитываемые по формулам (4), имеют те же значения: $k_1 = 0.01694$, $k_2 = 7.10245$, $k_3 = 9541.71$. Произведем теперь расчеты, используя формулы (5):

$$\lambda = \frac{9541.71 \cdot 0.004 - 7.10245}{111,1424} = 0.27950,$$

$$\mu = \frac{0.01694 - 7.10245 \cdot 0.004}{111,1424} = -0.00010,$$

$$p_1 = \frac{0.27950 \cdot 0.00109 - 0.00010}{0.00038} = 0.53159,$$

$$p_2 = \frac{0.27950 \cdot 0.00531 - 0.00010}{0.00330} = 0.41829,$$

$$p_3 = \frac{0.27950 \cdot 0.00005 - 0.00010}{0.00018} = -0.49344,$$

$$p_4 = \frac{0.27950 \cdot 0.00226 - 0.00010}{0.00097} = 0.54356.$$

Таблица

Решения задачи инвестирования при различных пороговых значениях доходности

Стратегия (портфель)	Доли средств				Дисперсия портфеля	Средняя доходность портфеля
	ЛЭСК	Самараэнерго	РусГидро	Якутскэнерго		
1	0.27831	0.03173	0.58195	0.10801	0.000105	0.00074
2	0.37599	0.18082	0.16719	0.275998	0.00024	0.002
3	0.260297	0.34313	0	0.396575	0.00057	0.003
4	0	0.57068	0	0.429319	0.00125	0.004
5	0	0.89797	0	0.10203	0.00267	0.005
6	0	1	0	0	0.003302	0.00531

Условие неотрицательности $p_i^0 \geq 0$, $i \in I_0$, в данном случае не выполняется, значит, данный вектор p решением не является. Аналогично предыдущему будем предполагать, что оптимальная смешанная стратегия содержит третью нулевую компоненту, так как p_3 отрицательное. Поэтому возьмем $I_0 = \{1, 2, 4\}$, тогда для данного случая величины k_1, k_2, k_3 рассчитаны в предыдущем примере, т.е. имеют значения 0.01692, 6.81673 и 3998.952 соответственно, и по формулам (5) $\lambda = 0.43466$, $\mu = -0.00049$, $p_1 = -0.05372$, $p_2 = 0.55010$, $p_3 = 0$, $p_4 = 0.50362$.

Условие неотрицательности для $i \in I_0 = \{1, 2, 4\}$ в данном случае снова не выполняется, значит, вектор p с нулевой компонентой p_3 решением не является. Предположим, что оптимальная смешанная стратегия содержит первую и третью нулевую компоненту. Поэтому возьмем $I_0 = \{2, 4\}$, тогда

$$k_1 = \frac{0.00531^2}{0.00330} + \frac{0.00226^2}{0.00226} = 0.01379,$$

$$k_2 = \frac{0.00531}{0.00330} + \frac{0.00226}{0.00226} = 3.93388,$$

$$k_3 = \frac{1}{0.00330} + \frac{1}{0.00226} = 1333.439,$$

$k_1 k_3 - k_2^2 = 2.91338 > 0$, и по формулам (5) имеем

$$\lambda^0 = \frac{1333.439 \cdot 0.004 - 3.93388}{2,91338} = 0.48050,$$

$$\mu^0 = \frac{0.01379 - 3.93388 \cdot 0.004}{2,91338} = -0.00067,$$

$p_1^0 = 0$, $p_2^0 = 0.57068$, $p_3^0 = 0$, $p_1^0 = 0.42932$.

Условия $\lambda^0 \overline{a}_1 + \mu^0 \leq 0$ и $\lambda^0 \overline{a}_3 + \mu^0 \leq 0$ для отброшенных первой и третьей стратегий (вложение в акции компаний ЛЭСК и РусГидро) выполняется:

$$\lambda^0 \overline{a}_1 + \mu^0 = 0.48050 \cdot 0.00109 - 0.00067 = -0.00015,$$

$$\lambda^0 \overline{a}_3 + \mu^0 = 0.48050 \cdot 0.00005 - 0.00067 = -0.00065.$$

Значит, решением является вложение в акции компаний Самараэнерго и Якутскэнерго. В этом примере значение целевой функции в оптимальной точке равно 0.00125.

В таблице содержатся характеристики шести стратегий инвестирования: доли средств, вкладываемые в акции компаний, средняя доходность, дисперсия. Портфель 1 соответствует стратегии минимального риска, нахождение составов портфелей 2, 3 и 4 приведено в данном пункте, состав портфеля 5 найден аналогично, и процедура его нахождения здесь не приводится. Портфель 6 соответствует чистой стратегии с наибольшей возможной доходностью.

На рис. 2 изображено эффективное множество стратегий с отмеченными на нем оптимальными стратегиями согласно таблице.

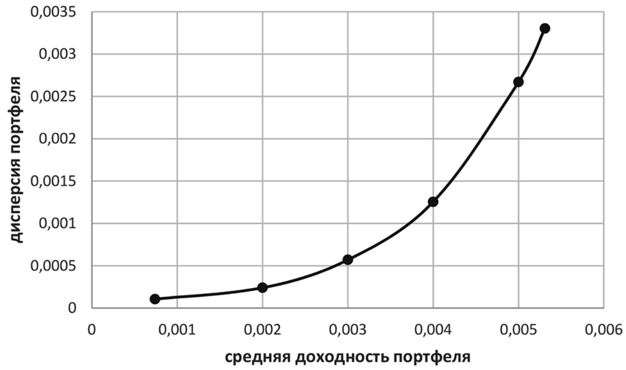

Рис. 2. Оптимальные стратегии инвестирования на эффективном множестве

Заключение

Понятие принципа оптимальности в задачах принятия решений в условиях неполной информации является весьма неоднозначным. ЛПР должен иметь возможность выбирать из спектра моделей принятия решений, отражающих зависимость вида рационального поведения от имеющейся информации и его отношения к риску. В работе предложена модель такого типа для случая вероятностной неопределенности, которая приводит к задаче минимизации дисперсии как оценки риска при ограничении снизу на математическое ожидание как оценки эффективности. Выбор порогового значения в ограничении отражает компромисс между эффективностью и риском и подлежит выбору ЛПР. Естественно, увеличение этого порогового значения приводит к уменьшению степени диверсификации инвестиционного портфеля и росту дисперсии.

Литература

1. Горелик В.А., Золотова Т.В. О некоторых функциях риска и их применении в инвестиционных задачах // Управление риском. 2011. № 3. С. 59–64, № 4. С. 2–8.

2. Горелик В.А., Золотова Т.В. Принцип оптимальности «математическое ожидание – VAR» и его применение в задачах фондового инвестирования // Управление развитием крупномасштабных систем: Труды 12 международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 148–154.

3. Жуковский В.И., Кириченко М.М. Риски и исходы в многокритериальной задаче при неопределенности // Управление риском. 2016. № 2. С. 17–25.

4. Клименко И.С, Плуталов М.А., Чеботарев Г.А. Сравнительный анализ критериев выбора стратегий в «игре с природой» // Вестник российского нового университета. Серия: сложные системы: модели, анализ и управление. 2015. № 1. С. 55–59.

5. Лабскер Л.Г. Свойство синтезирования критерия Вальда-Сэвиджа и его экономическое приложение // Экономика и математические методы. 2019. Т. 55. № 4. С. 89–103.

6. Прохорова М.С. Исследование связи решений задач на максимум линейной свертки «математическое ожидание – дисперсия» и на минимум дисперсии при ограничении по доходности // Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. 2014. № 3. С. 162–166.

7. Шарп Уильям Ф., Александер Гордон Дж., Бэйли Джефри В. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2018. 1028 с.

8. Инвестиционная компания «ФИНАМ» [Электрон. ресурс]. Режим доступа: https://www.finam.ru/

9. Bekaert G., Hoerova M. The VIX, the variance premium and stock market volatility // Journal of Econometrics. 2014. № 183(2). С. 181–192.

10. Ben Saïda A., Koubaa Y., Slim S. Value-at-Risk under Lévy GARCH models: Evidence from global stock markets // Journal of International Financial Markets, Institutions and Money. 2017. № 46. С. 30–53.

11. Choudhary R., Rysanek A.M. Optimum building energy retrofits under technical and economic uncertainty // Energy and Buildings. 2013. № 57. С. 324–337.

12. Congleton William R. Dairy Cow Culling Decision. 3. Risk of Culling on Predicted Income (An Application of Bayes Criterion) // Journal of Dairy Science. 1988. № 71 (7). С. 1916–1925.

13. García F., González-Bueno J.A., Oliver J. Mean-variance investment strategy applied in emerging financial markets: Evidence from the Colombian stock market // Intellectual Economics. 2015. № 9 (1). С. 22–29.

14. Gong X., Lin B. Structural changes and out-of-sample prediction of realized range-based variance in the stock market // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2018. № 494. С. 27–39.

15. Huang A., Qiu L., Li Z. Applying deep learning method in TVP-VAR model under systematic financial risk monitoring and early warning // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2021. № 382.

16. Harman R., Prus M. Computing optimal experimental designs with respect to a compound Bayes risk criterion // Statistics & Probability Letters. 2018. № 137. С. 135–141.

17. Kozaki M. Sato A. -H. Application of the Beck model to stock markets: Value-at-Risk and portfolio risk assessment // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2008. № 387 (5–6). С. 1225–1246.

18. Kuzmics C. Abraham Wald's complete class theorem and Knightian uncertainty // Games and Economic Behavior. 2017. № 104. С. 666–673.

19. Ourir A., Snoussi W. Markets liquidity risk under extremal dependence: Analysis with VaRs methods // Economic Modelling. 2012. № 29 (5). С. 1830–1836.

20. Radner R. Decision and Choice: Bounded Rationality // International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences (Second Edition). 2015. С. 879–885.

21. Riedle T. Using Market BuVaR as countercyclical Value at Risk approach to account for the risks of stock market crashes // The Quarterly Review of Economics and Finance. 2018. № 69. С. 308–321.

22. Su X. Measuring extreme risk spillovers across international stock markets: A quantile variance decomposition analysis // The North American Journal of Economics and Finance. 2020. № 51.

23. Xu Y., Xiao J., Zhang L. Global predictive power of the upside and downside variances of the U.S. equity market // Economic Modelling. 2020. № 93. С. 605–619.

References

1. Gorelik V.A., Zolotova T.V. On some risk functions and their application in investment problems. Upravleniye riskom = Risk Management. 2011.3: 59-64. 4: 2-8. (In Russ.)

2. Gorelik V.A., Zolotova T.V. The principle of optimality "mathematical expectation – VAR" and its application in problems of stock investment. Upravleniye razvitiyem krupnomasshtabnykh sistem: Trudy 12 mezhdunarodnoy konferentsii = Management of the development of large-scale systems: Proceedings of the 12th international conference. Moscow: IPU RAN; 2019: 148-154. (In Russ.)

3. Zhukovskiy V.I., Kirichenko M.M. Risks and outcomes in a multicriteria problem under uncertainty. Upravleniye riskom = Risk Management. 2016; 2: 17-25. (In Russ.)

4. Klimenko I.S, Plutalov M.A., Chebotarev G.A. Comparative analysis of the criteria for choosing strategies in the "game with nature" Vestnik rossiyskogo novogo universiteta. Seriya: slozhnyye sistemy: modeli, analiz i upravleniye = Bulletin of the Russian new university. Series: complex systems: models, analysis and management. 2015; 1: 55-59. (In Russ.)

5. Labsker L.G. The property of synthesizing the Wald-Savage criterion and its economic application. Ekonomika i matematicheskiye metody = Economics and Mathematical Methods. 2019; 55; 4: 89-103. (In Russ.)

6. Prokhorova M.S. Investigation of the connection between solutions to problems for the maximum of the linear convolution "mathematical expectation - variance" and for the minimum of variance with a constraint on profitability. Ekonomika, statistika i informatika. Vestnik UMO = Economics and Mathematical Methods. 2014; 3: 162-166. (In Russ.)

7. Sharp Uil'yam F., Aleksander Gordon Dzh., Beyli Dzhefri V. Investitsii = Investments. Moscow: INFRA-M; 2018. 1028 p. (In Russ.)

8. Investitsionnaya kompaniya «FINAM» = Investment company "FINAM" [Internet]. Available from: https://www.finam.ru/.(In Russ.)

9. Bekaert G., Hoerova M. The VIX, the variance premium and stock market volatility. Journal of Econometrics. 2014; 183(2):181-192.

10. Ben Saïda A., Koubaa Y., Slim S. Value-at-Risk under Lévy GARCH models: Evidence from global stock markets. Journal of International Financial Markets, Institutions and Money.2017; 46: 30-53.

11. Choudhary R., Rysanek A.M. Optimum building energy retrofits under technical and economic uncertainty. Energy and Buildings. 2013; 57: 324-337.

12. Congleton William R. Dairy Cow Culling Decision. 3. Risk of Culling on Predicted Income (An Application of Bayes Criterion). Journal of Dairy Science. 1988; 71 (7): 1916-1925.

13. García F., González-Bueno J.A., Oliver J. Mean-variance investment strategy applied in emerging financial markets: Evidence from the Colombian stock market. Intellectual Economics. 2015; 9 (1): 22-29.

14. Gong X., Lin B. Structural changes and out-of-sample prediction of realized range-based variance in the stock market. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2018; 494: 27-39.

15. Huang A., Qiu L., Li Z. Applying deep learning method in TVP-VAR model under systematic financial risk monitoring and early warning. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2021; 382.

16. Harman R., Prus M. Computing optimal experimental designs with respect to a compound Bayes risk criterion. Statistics & Probability Letters. 2018; 137: 135-141.

17. Kozaki M. Sato A. -H. Application of the Beck model to stock markets: Value-at-Risk and portfolio risk assessment. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2008; 387 (5-6): 1225-1246.

18. Kuzmics C. Abraham Wald's complete class theorem and Knightian uncertainty. Games and Economic Behavior. 2017; 104: 666-673.

19. Ourir A., Snoussi W. Markets liquidity risk under extremal dependence: Analysis with VaRs methods. Economic Modelling. 2012; 29 (5): 1830-1836.

20. Radner R. Decision and Choice: Bounded Rationality. International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences (Second Edition). 2015: 879-885.

21. Riedle T. Using Market BuVaR as countercyclical Value at Risk approach to account for the risks of stock market crashes. The Quarterly Review of Economics and Finance. 2018; 69: 308-321.

22. Su X. Measuring extreme risk spillovers across international stock markets: A quantile variance decomposition analysis. The North American Journal of Economics and Finance. 2020; 51.

23. Xu Y., Xiao J., Zhang L. Global predictive power of the upside and downside variances of the U.S. equity market. Economic Modelling.2020; 93: 605-619.

Сведения об авторах

Виктор Александрович Горелик
Д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник вычислительного центра им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия
Эл. почта: vgor16@mail.ru

Татьяна Валерьяновна Золотова
Д.ф.-м.н., профессор,
Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия
Эл. почта: tgold11@mail.ru

Information about the authors

Victor A. Gorelik
Dr. Sci. (Sociological), Professor, Leading researcher Computing Centre
FRC CSC RAS, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia
E-mail: vgor16@mail.ru

Tatiana V. Zolotova
Dr. Sci. (Sociological), Professor,
Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia
E-mail: tgold11@mail.ru