ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

УДК 519.2+338.27

Виктор Александрович Власов,
д.т.н., проф., профессор кафедры Автоматики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Московский инженерно-физический институт)
Тел.: 8 (495)-343-96-22
Эл. почта: vlasov1941@yandex.ru

Сергей Иванович Алексеев,
к.т.н., доц., зав. кафедры Естественнонаучных, математических и общетехнических дисциплин, Евразийский открытый институт (ЕАОИ)
Тел.: 8 (495)-434-08-49
Эл. почта: SAlekseev@eaoi.ru

Раиса Ивановна Сорока,
доц. каф. Математического обеспечения информационных систем и инноватики, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)
Тел.: 8 (495)-442-80-98
Эл. почта: RSoroka@mesi.ru

Андрей Олегович Толоконский,
к.т.н., доц. каф. Автоматики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Московский инженерно-физический институт)
Тел.: 8 (495)- 321-40-75
Эл. почта: toloconne@yandex.ru

В статье показано, что оценивание (прогнозирование) значений случайных величин по критерию минимума дисперсии ошибки оценивания не всегда эффективно, а иногда просто не допустимо (приводятся примеры). Используется цель оценивания, описываемая функционалом. Задача оценивания трактуется как поиск оптимального решения и иллюстрируется с помощью формирования оптимальной игровой стратегии.

Ключевые слова: прогнозирование случайных процессов, вероятностные модели, показатели качества, цель прогнозирования, критерии оптимальности, игровая стратегия, оптимальное решение, риски.

Victor A. Vlasov,
Doctorate of Engineering, Professor, the Department of Automation, MIFI National Nuclear Research University (Moscow Engineering and Physics Institute)
Tel.: 8 (495) 343-96-22
E-mail: vlasov1941@yandex.ru

Sergey I. Alexeev,
PhD in Engineering, Professor, the Head of the Chair of Experimental, Mathematical and Technical Disciplines, Eurasian Open Institute (EAOI)
Tel.: 8 (495)-434-08-49
E-mail: SAlekseev@eaoi.ru

Raisa I. Soroka,
Associate Professor, the Department of Mathematical Support of Information Systems and Innovation Studies, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics (MESI)
Tel.: 8 (495)-442-80-98
E-mail: RSoroka@mesi.ru

Andrey O. Tolokonski,
PhD in Engineering, Associate Professor, the Department of Automation, MIFI National Nuclear Research University (Moscow Engineering and Physics Institute)
Tel.: 8 (495) 321-40-75,
E-mail: toloconne@yandex.ru

FORECASTING AND DECISION-MAKING VIA USE OF STATISTICAL LAWS OF RANDOM ECONOMIC INDICATORS

The article shows that the estimation (forecasting) of the values of random variables, according to the minimum variance estimation error is not always effective, and sometimes not even possible. The authors give examples to prove it. The estimation is described with a functional. The task of the estimation is treated as a search for an optimal solution and is illustrated with formation of the optimal playing strategy.

Keywords: forecasting of random processes, probabilistic models, quality performances, forecast objective, optimality criteria, playing strategy, optimal solution, risks.

1. Введение

Практика постоянно требует необходимости прогнозирования состояния (или показателей качества) различных экономических (физических, информационных, технических и т.п.) объектов. В настоящее время очень важно, например, для задач планирования знать поведение цен основных ресурсов (нефти, газа и т. д.). Однако, постоянные возмущения, носящие случайный характер, сильно осложняют достижение поставленных при планировании целей. Как правило, для преодоления трудностей, вызванных непредсказуемым характером случайных величин, строятся вероятностные модели.

2. Прогнозирование и различная стоимость последствий ошибок

Рассмотрим сначала простую задачу прогнозирования значения случайной величины ξ при ее известной плотности распределения $p_\xi(x)$. Дать прогноз для случайной величины ξ означает указать конкретное число q, которое примет величина ξ после ее наблюдения. Однако, какое бы число q не было названо, вероятность того, что случайная величина ξ примет это значение равна нулю. Это следует из соотношения

$$p(\xi \in D) = \int_D p_\xi(x)dx,$$

где $p(\xi \in D)$ означает вероятность попадания значения случайной величины в заданную область D.

Если область интегрирования состоит из одной точки, то вероятность попадания в нее значения случайной величины равна нулю. Казалось бы, что такая задача прогнозирования теряет смысл. Тем не менее, если согласиться с неизбежностью ошибки $\varepsilon = \xi - q$ прогнозирования, то оказывается корректным прогнозирование с минимальной ошибкой. Обычно в качестве меры ошибки используют ее среднеквадратическое значение [1,2]. Минимизируем по величине q выражение $J = \int(x-q)^2 p_\xi(x)dx$, путем приравнивания нулю производной $\frac{\partial J}{\partial q}$.

Это приводит к следующему результату: оптимальное прогнозное значение совпадает с математическим ожиданием величины ξ, то есть $q = M[\xi]$.

В случае, когда рассматривается условный закон распределения величины ξ , оптимальным будет ее условное математическое ожидание. Подобное прогнозирование с применением критерия среднеквадратического отклонения широко используется при прогнозировании значений случайных процессов в выбранные моменты времени, а также, в теории управления при построении фильтров Калмана- Бьюсси [3,4].

Однако, такое прогнозирование не всегда оказывается эффективным, а в ряде случаев просто не допустимо. Рассмотрим пример обеспечения безопасности эксплуатации тепловыделяющей сборки (ТВС) в энергетическом ядерном реакторе. ТВС в ядерном реакторе атомной электростанции (АЭС) охлаждается теплоносителем, температура которого не должна превышать температуру θ_k кипения. При кипении теплоносителя происходит потеря его теплового контакта с поверхностью ТВС и она начинает перегреваться, что в конечном итоге может привести к аварии. Поэтому температура теплоносителя подлежит измерению и контролю [5]. Приведем упрощенный вероятностный анализ функции контроля [6]. Пусть имеется возможность управлять значением температуры охлаждающей жидкости и для этого используется результат η измерения температуры:

$$\eta = \theta + \varepsilon,$$

где: θ – истинное, но неизвестное значение температуры теплоносителя на момент измерения;
ε – случайная ошибка измерения.

Пусть $M[\varepsilon] = 0$, дисперсия $\sigma^2[\varepsilon]$ ошибки известна и плотность распределения $p_\varepsilon(x)$ ошибки измерения соответствует нормальному закону. Если дать оптимальную оценку $\hat{\varepsilon}_0$ значению ошибки измерения с использованием критерия $J = M[(\varepsilon - \hat{\varepsilon})^2]$, то она окажется равной нулю. При таких рассуждениях следует руководствоваться правилом: целесообразно с помощью управляющих воздействий (обычно это перемещение стержней управления) поддерживать равенство $\eta = \theta_k$. Этот вывод является практически неверным, поскольку вероятность нахождения в опасных режимах (когда значение истинной температуры превышает температуру кипения) будет большой (равна 0,5). Это следует из равенства $\theta = \theta_k - \varepsilon$, , которое обеспечивается за счет введения управляющих воздействий. Стоимость устранения последствий аварий велика и, прежде всего, необходимо беспокоиться о снижении вероятности возникновения опасных режимов эксплуатации. Реально это делается путем введения допустимого значения η_∂ результата измерения, то есть принимается решение о недопустимости превышения результатом измерения величины η_∂.

Здесь отчетливо проявляется различная стоимость последствий ошибок: при положительных ошибках будет выработано меньше электроэнергии, что приведет к некоторым убыткам, но при отрицательных ошибках убытки значительно выше.

Поэтому в задаче оценивания значений случайных величин можно было бы ввести понятие веса (например, стоимости) ошибки $\varphi(\varepsilon)$ и определять оптимальное значение оценки, исходя из условия минимальных средних потерь при многократном принятии решений. Важно отметить, что речь идет не о прогнозировании значений физических величин, которое в рассматриваемом случае вряд ли само по себе имеет смысл. Используется закон распределения $p_\varepsilon(x)$ для выбора правильного решения (величины η_∂). Таким образом, приходим к использованию критерия оптимальности вида:

$$J_0 = \int \varphi(q - x) p_\xi(x) dx.$$

Оптимальное решение q_0 находится из условия равенства нулю производной от критерия J_0 по величине q.

В рассмотренном примере негласно предполагается, что поиск оптимальных решений производится неоднократно, когда практически можно ориентироваться на понятие математического ожидания.

В литературе [7,8] можно найти другие примеры, когда стоимость ошибки предсказания значения случайной величины вообще не рассматривается при принятии решения, а определяется оптимальное решение, исходя из зависимости качества решения от параметра q.

В работе [7] рассмотрена задача принятия решения об оптимальном числе закупаемых газет при последующей продаже их по более высокой цене. Простейший вариант этой задачи, рассмотренный в монографии [8], где предполагается, что закупочная цена газеты равна 2, а продажная равна 10, приводит к заключению: число закупаемых газет для достижения максимальной прибыли должно быть значительно больше среднего числа покупаемых газет более, чем на 50%. При этом прибыль в оптимальном варианте более чем на 12% превышает прибыль, полученную от закупки среднего числа газет.

3. Задачи поиска оптимальных решений и наибольших (или наименьших) значений критерия

В общем случае, когда преследуется цель получения максимального значения среднего экономического итога J, следует определить зависимость этого итога от решения q в виде функционала $J = \int F[q, p_\xi(x)] dx$, зависящего от закона распределения $p_\varepsilon(x)$ и от величины q, как от параметра. Поиск оптимального значения осуществляется путем дифференцирования рассматриваемого интеграла по параметру q и приравниванием производной нулю.

Если параметр q является векторным, то есть имеет составляющие $q_1, q_2, \ldots, q_k$, то оптимальное решение находится путем приравнивания нулю частных производных по составляющим параметра [9].

Наряду с задачами поиска оптимальных решений, когда удается находить экстремумы критериев оптимальности путем приравнивания нулю дифференциала критерия оптимальности, имеются задачи поиска наибольших (или наименьших) значений критерия. Например, в теории оптимального управления динамическими объектами для решения подобных задач используются либо динамическое программирование, либо принцип максимума Понтрягина. В таких случаях важно сохранить основную концепцию: следует искать оптимальное решение, при котором достигается наибольшее (или наименьшее) значение функционала. Имеются такие задачи и в экономике.

Рассмотрим известную задачу оптимального распределения средств [10,11], частным случаем которой является формирование портфеля ценных бумаг. Проведем анализ поиска оптимального решения такой задачи (заметим, что она не носит динамического характера). Приведем общую математическую постановку задачи. Требуется распределить имеющиеся средства объемом K на составляющие $x_1, x_2, \ldots, x_n$, каждая из которых означает величину вклада средств в соответствующую статью расходов (например, покупку бумаг определенного вида). При этом окончательный экономический итог R рассчитывается по формуле

$$R = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \;, \qquad (1)$$

где коэффициенты β_i означают эффективность вложения средств в каждую из статей расходов с номером i (например, во сколько раз подорожает соответствующая ценная бумага).

Если коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ являются случайными, то величина R, как функция от них, также случайна. Можно говорить о вероятности P_r наступления неблагоприятного события, например: $R < K$, то есть ожидания возможности убытков. В такой вероятностной постановке считаются известными математические ожидания $M[\beta_i]$ коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и, при необходимости, другие сведения о законах распределения этих величин (например, дисперсии).

Понятно, что имеет место равенство $\sum_{i=1}^{n} x_i = K$. На составляющие $x_1, x_2, \ldots, x_n$ могут быть наложены другие ограничения (обычно линейные).

Если коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ являются не случайными, то при линейных ограничениях на величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ максимальное значение величины R легко находится методами линейного программирования (решается детерминированная задача). Когда же $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ – случайные величины, то возникают особенности при принятии решения, то есть выбора величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Особенность, например, может заключаться в том, что при принятом решении вероятность получения убытков оказывается недопустимо высокой. В этом случае рекомендуется, например [10], для каждого выбранного среднего значения $M[R]$ (фактически это еще одно линейное ограничение на величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вида $M[R] = \sum_{i=1}^{n} M[\beta_i]x_i$) искать оптимальные значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых вероятность выполнения неравенства $R < K$ будет минимальной и приемлемой.

Следует заметить, что каждое дополнительное ограничение на искомые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может привести к исключению оптимальной точки из рассмотрения (это очевидно, например, если рассматривается детерминированная задача распределения средств, то есть при неслучайных значениях коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$).

Использование такого подхода имеет ряд других недостатков:

- не ясно, как выбрать окончательно среднее значение величины $M[R]$, и, соответственно, на каком значении вероятности получения убытков следует остановиться (то есть решение задачи выбора окончательного единственного решения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не формализовано и оставлено на интуицию владельца средств);
- каким бы ни было принято значение вероятности P наступления неблагоприятного события, всегда остаются риски получения больших убытков (хотя и с меньшей вероятностью);
- не рассматриваются такие рисковые ситуации, при которых не получается желаемый (достаточно большой) выигрыш, то есть не учитываются возможности получения больших экономических итогов;
- в случае, если случайные величины $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ зависимы, приходится проводить громоздкий анализ их закона распределения;
- при зависимых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ поиск решения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для выбранного значения $M[R]$ приходится осуществлять с применением трудоемких алгоритмов (трудозатраты значительны даже при использовании только корреляционных моментов величин методами квадратичного программирования).

Главной причиной перечисленных недостатков является попытка применения вероятностных методов к решению разовых вероятностных задач, повторения которых реально может и не быть. Это связано с тем, что вероятностные закономерности проявляются, обычно, при большом числе повторяющихся однотипных ситуаций. Например, при небольшом числе бросаний несимметричного игрального кубика не удается точно определить вероятности выпадения различных чисел (понятно, что тем более это невозможно вообще при реализации всего одного бросания). В теории вероятностей есть соответствующий закон больших чисел, согласно которому наблюдаемая в опытах частота появления случайного события стремится к вероятности события при большом числе испытаний [12].

4. Формирование оптимальной игровой стратегии

В данной работе рассматривается возможность устранения упомянутых недостатков на основе формирования оптимальной игровой стратегии в условиях, когда приходится принимать решения в большом числе различных игровых ситуаций. Рассуждения ориентированы, в частности, на анализ известной задачи формирования портфеля ценных бумаг, если подобная задача решается неоднократно.

Желательно избавить владельца средств от необходимости выбора окончательного решения (это, например, значения $M[R]$ или, после оптимизации, соответственно величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$) из множества возможных решений. С этой целью обратимся к процедуре использования закона распределения $p_\xi(x)$ случайной величины ξ для выбора оптимального решения. Для этого введем функционал качества решения в виде

$$J = \int \varphi(y-K)p_R(y)dy, , \qquad (2)$$

где: y – аргумент плотности распределения $p_R(y)$ величины R (возможное значение R); функция $\varphi(y-K)$ характеризует вес разности между величинами R и K .

Пусть

$$\varphi(R-K) = \lambda(R-K), ,$$

где λ – вещественное число.

Выражение $\varphi(R-K) = \lambda(R-K)$ имеет простой смысл: на сколько рублей ошибся при прогнозе, столько рублей и заплати (или получи), а коэффициент λ можно трактовать, например, как переводной от одних денежных единиц к другим.

Понятно, что при условии: $\lambda > 0$ следует выбирать оптимальное решение, исходя из наибольшего значения критерия J, то есть из наибольшего среднего значения разности $R - K$.

Пусть совместная плотность распределения величин $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta n$ равна $p_\beta(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогда, как бы ни были выбраны значения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, , закон распределения $pR(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ окончательного итога R (это функция от случайных величин $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$) будет зависеть от величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, как от параметров.

Совокупность величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и подлежит определению для формирования оптимального решения.

Пользуясь свойством линейности интеграла (2) и учитывая, что $\int p_R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)du = 1$ при любых значениях величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получим

$$J = \lambda(M[R]) - K), \qquad (3)$$

где $M[R]$ зависит от величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как от параметров (в рассматриваемом случае эти параметры и подлежат поиску, они составляют суть решения).

На основе анализа выражения (3) можно заключить, что при $\lambda > 0$ среднее значение величины R следует выбирать по возможности наибольшим. Это приведет к достижению наибольшего значения величины $M[R]$ и, соответственно, наибольшему значению критерия. Здесь следует искать наибольшее, а не экстремальное значение критерия.

Поскольку справедливо равенство $M[R] = \sum_{i=1}^{n} M[\beta_i]x_i$, то для принятия оптимального решения следует использовать только значения $M[\beta_i]$ и ограничения на переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если эти ограничения являются линейными, то оптимальные значения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые и составляют цель выбора оптимального решения, находятся методами линейного программирования. Такой подход охватывает все множество рисковых ситуаций, связанных как с получением убытков, так и с неполучением достаточно большой прибыли.

Если ограничения носят нелинейный характер, то в силу ограниченности и замкнутости области допустимых решений оптимальные значения переменных могут принадлежать границе области и следует их искать методом неопределенных множителей Лагранжа. При этом следует использовать ограничения на величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ только вида равенств, поскольку эти величины удовлетворяют уравнению, описывающему границу.

Уместно заметить, что известны подходы, связанные с выбором оптимальной стратегии в матричных играх, которая формируется как оптимальная смешанная стратегия. Сущность ее состоит в выборе чистых стратегий с определенными вероятностями. Понятно, что реализация любой смешанной стратегии, в том числе и оптимальной, предполагает большое число туров игры.

Поиск оптимального решения может быть значительно более трудоемким, если критерий оптимальности имеет более сложный вид по сравнению с выражением (2). Однако, введение другого вида функции веса ошибок требует дополнительного обоснования. Обоснованием стратегии максимизации математического ожидания экономического итога может служить анализ дисперсии среднего значения независимых случайных величин

$$\sigma^2[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_i] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2[R_i] \le \frac{\sigma_m^2}{N}, \quad (4)$$

где: $\sigma^2[]$ – символ дисперсии;
$\sigma^2[R_i]$ – дисперсия экономического итога в каждой независимой задаче с номером i, (i = 1, 2, …, N) распределения средств);
N – число решаемых задач распределения средств.

Из анализа выражения (4) следует, что дисперсия среднего значения экономического итога стремится к нулю с увеличением N (то есть среднее значение становится фактически неслучайной величиной). Поэтому, при многократном участии в распределении средств, необходимо каждый раз стремиться к максимизации величины $M[R]$.

5. Заключение

Следует отметить, что отклонение от оптимальной стратегии в процессе участия в большом числе игровых туров приведет к снижению суммарного итога. Примером источника такого отклонения является использование ограничений на допустимое значение величины риска – Var, если придется использовать условие M[R] < Mm[R]. . Это не позволит в полной мере реализовывать оптимальную игровую стратегию и является неоправданным при участии в большом числе различных игровых туров. Поэтому использование этого ограничения можно рассматривать как волевое административное решение, которое направлено на защиту владельца средств при его участии в единственном туре игры (когда, вообще говоря, вероятностные методы применять нет оснований).

В заключении можно отметить, что при прогнозировании значений случайных величин следует вводить цель прогнозирования, которая описывается критерием оптимальности.

Литература

1. Рао С. Линейные статистические методы и их применение. М.: Наука, 1968.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1964.
3. Розанов Ю. А. Случайные процессы. М.: Наука, 1971.
4. Александров А. Г. и др. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.
5. Филипчук Е. В., Потапенко П. Т., Постников В. В. Управление нейтронным полем ядерного реактора. М.: Энергоатомиздат, 1981.
6. Власов В. А. Статистический контроль состояния объектов с распределенными параметрами. М.: МИФИ, 1987.
7. Кофман А., Фор Р. Займемся исследованием операций. М.: Мир, 1966.
8. Власов В. А. Оценки, решения, риски. М.: БИНОМ, 2012.
9. Власов В. А., Попов П. И. Прогнозирование значений случайных величин и оценивание неизвестных параметров. Сб. Автоматизация управления технологическими процессами. Вып. 2. М.: Атомиздат, 1977.
10. Первозванский А. А., Первозванская Т. Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М. : Инфра-М, 1994.
11. Роберт В., Рикардо Дж. Родригес. Финансовый менеджмент. М.: Финпрес, 2001.
12. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука,1985.

References

1. Rao C. Linear statistical methods and their application. M.: Science, 1968.
2. Вентцель E. S. Theory of probabilities. M.: Nauka, 1964.
3. Rozanov Yu. A. The random processes. M.: Nauka, 1971.
4. Alexandrov A. G. and others. Reference book on the theory of automatic control. M.: Nauka, 1987.
5. Filipchuk E. V., Potapenko P. T., Postnikov V. V. Management of the neutron field of the nuclear reactor. M.: Energoatomizdat, 1981.
6. Vlasov V. A. Statistical monitoring of the status of objects with distributed parameters. M.: Moscow engineering physics Institute, 1987.
7. Kofman A., For R. Get to operations research. M.: The world, 1966.
8. Vlasov V. A. Assessment, decisions, risks. M.: BINOM, 2012.
9. Vlasov V. A., Popov P. I. Forecasting of the values of random variables and the estimation of the unknown parameters. Col. Automation control of technological processes. Is.2. M.: Atomizdat, 1977.
10. Pervozvanski A. A., Pervozvanskaya T.N. The financial market: the calculation of the risk. M. : Infra-M, 1994.
11. Robert V., Ricardo J. Rodriguez. Financial management. M.: Финпрес, 2001.
12. Korolyuk V. S., Portenko N. I., Skorokhod A. V., Turbin A. F. Handbook on probability theory and mathematical statistics. M.: Nauka,1985.