

ИССЛЕДОВАНИЕ УЧЕТА ВРЕМЕННОЙ СТОИМОСТИ ДЕНЕГ В КЛАССИЧЕСКИХ МНОГОНОМЕНКЛАТУРНЫХ МОДЕЛЯХ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

УДК 338.012

Наталья Анатольевна Черняева,
доцент кафедры каф. Экономики и менеджмента
Пензенской государственной технологической академии
Тел. (8412) 49-61-59
Эл. почта: nachernyaeva@yandex.ru

Владимир Федорович Шишов
к.э.н., доцент каф. Прикладной математики и исследований операций в экономике Пензенской государственной технологической академии
Тел. (8412) 49-61-59
Эл. почта: vfshishov@mail.ru

В статье рассмотрены два вида моделей – традиционная многономенклатурная модель управления запасами при постоянном спросе и модель учета средней стоимости запасов при оптимизации системы управления запасами. При учете временной стоимости денег в моделях изучались три возможные схемы выплаты издержек: «пренумерандо» (в момент общей поставки партии заказа), «постнумерандо» (в момент общей поставки следующей партии заказа) и схема выплаты издержек в середине периода времени. В качестве критерия оптимизации стратегии управления запасами принималась максимизация суммарной интенсивности доходов для имеющих место в системе управления запасами уходящих и приходящих денежных потоков, характеризующих анализируемые модели.

Ключевые слова: модели управления запасами, временная стоимость денег, спрос, затраты на хранение, объем заказа, количество поставок, накладные расходы, стратегия управления запасами.

Natalya A. Chernyaeva,
Associate Professor, the Department of Economics and Management,
Penza State Technological Academy,
Tel.: (8412) 49-61-59,
E-mail: nachernyaeva@yandex.ru

Vladimir F. Shishov,
PhD in Economics, Associate Professor, the Department of Applied Mathematics and Operations Research in Economics,
Penza State Technological Academy,
Tel.: (8412) 49-61-59
E-mail: vfshishov@mail.ru

INVESTIGATION INTO ACCOUNT OF A TIME VALUE OF MONEY IN CLASSICAL MULTITOPIC INVENTORY MODELS

The article describes two types of models. The first is a traditional multitopic inventory model with constant demand and the second is a model based on the average cost of inventory in optimizing inventory management system. The authors taking into account the time value of money in the models study three possible schemes for the payment of costs: «prenumerando» (at the time of the general batch order delivery), «postnumerando» (at the time of the general next batch order delivery) and the scheme of payment of costs in the mid-term. Maximization of the total intensity of revenue for outgoing and incoming cash flows occurring in the inventory management system that characterize the analyzed models was adopted as the criterion of optimization of inventory control strategy.

Keywords: models of inventory management, time value of money, demand, cost of storage, amount of order, number of deliveries, overhead costs, inventory control strategy.

1. Введение

Теория управления запасами относится к числу наиболее молодых отраслей исследования операций, хотя отдельные результаты ее получены достаточно давно.

Складские системы промышленных предприятий содержат от нескольких десятков до нескольких тысяч номенклатур. Следовательно, возникает необходимость рассмотрения задач управления многономенклатурными запасами.

Целью работы явилось изучение моделей управления многономенклатурными запасами на основе учета временной стоимости денег при оптимизации систем управления запасами.

В работе рассматривались два вида моделей – традиционная многономенклатурная модель управления запасами при постоянном спросе и модель учета средней стоимости запасов при оптимизации системы управления запасами. При этом ставился вопрос о необходимости учета временной стоимости денег при оптимизации многономенклатурных моделей управления запасами. В случае учета временной стоимости денег в модели изучались три возможные схемы выплаты издержек: «пренумерандо» (в момент общей поставки партии заказа), «постнумерандо» (в момент общей поставки следующей партии заказа) и схема выплаты издержек в середине периода времени.

В качестве критерия оптимизации стратегии управления запасами принималась максимизация суммарной интенсивности доходов для имеющих место в системе управления запасами уходящих и приходящих денежных потоков, характеризующих анализируемую систему.

2. Традиционная многономенклатурная модель управления запасами при постоянном спросе

В традиционных многономенклатурных моделях управления запасами при постоянном спросе учитывается произвольное количество N видов i -товаров ($i = \overline{1, N}$), по каждому из которых планируется свой запас. Поставка всех товаров каждый раз общая, т.е. в партии заказа представлены все виды анализируемых товаров, причем размер заказа для каждого вида i -товара свой. Обозначения, принятые в моделях:

- спрос на i -товар постоянен; D_i – его годовое потребление;
- поставки общие; T_0 – интервал повторного заказа;
- затраты на хранение единицы i -товара – C_{hi} (зависят от i -товара);
- накладные затраты одной поставки – C_0 (общие для партии заказа);
- объем заказа i -товара – q_i (в партии общей поставки);
- ежегодное количество поставок — $1/T_0$ (где T_0 обозначается в годах);
- средний годовой уровень запаса i -товара – $q_i/2$.

Величина суммарных годовых затрат для анализируемой модели определяется выражением (1.1):

$$C_0 \cdot \left(\frac{1}{T} \right) + \sum_{i=1}^N C_{hi} \cdot (q_i / 2), \quad (1.1)$$

причем для любого фиксированного $T = T_0$ имеем: $q_i = T_0 \cdot D_i$.

Введем дополнительные обозначения:

$\bar{D} = (D_1, D_2, \dots, D_N)$ – вектор годового потребления i -товаров;

$\bar{C}_h = (C_{h1}, C_{h2}, \dots, C_{hN})$ – вектор тарифов затрат на хранение;

$\bar{D} \cdot \bar{C}_h$ – скалярное произведение этих векторов, которое находится по формуле (1.2).

$$\bar{D} \cdot \bar{C}_h = D_1 C_{h1} + D_2 C_{h2} + \dots + D_N C_{hN} \quad (1.2)$$

Теперь задача нахождения оптимальной стратегии может быть квалифицирована как задача минимизации суммарных затрат, представленных функцией $C_r(T_0)$ переменной T_0 :

$$C_r(T_0) = C_0 \cdot \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{T_0}{2} \cdot (\bar{D} \cdot \bar{C}_h) \rightarrow \min_{T_0 > 0} \quad (1.3)$$

Найдем оптимальное значение интервала T_0^* повторного заказа, затем (с учетом равенств $q^* = D_i \cdot T_0^*$) – оптимальный размер заказа q_i^* по каждому i -товару.

Первое слагаемое в правой части представленного выражения (как функция переменной T_0) представляет собой гиперболу, второе слагаемое – линейную функцию. Легко видеть, что точка минимума существует.

Интервал повторного заказа (общий) находится по формуле (1.4):

$$T_0^* = \sqrt{2C_0 / (\bar{D} \cdot \bar{C}_h)} \quad (1.4)$$

В случае, когда поставки по каждому i -товару организуются независимо одна от другой, оптимальный интервал повторного заказа для i -товара равен

$$T_i^* = \sqrt{2C_0 / (C_{hi} \cdot D_i)} \quad (1.5)$$

Сравнивая это выражение для T_i^* с приведенным выше выражением для T_0^* , легко видеть, что для многономенклатурной модели с общими поставками интервал повторного заказа становится (при сохранении накладных расходов на поставку) более «коротким»: $T_i^* < T_0^*$, $C_{hi} \cdot D_i < \bar{D} \cdot \bar{C}_h$.

Экономичный размер заказа (i -товара) определяется по формуле (1.6):

$$q_i^* = D_i \sqrt{2C_0 / (\bar{D} \cdot \bar{C}_h)} \quad (1.6)$$

Рассмотрим применение полученных зависимостей на примере «Теплосетевой компании», которой для выполнения аварийно-восстановительных работ в течение года необходимо закупать 5 видов оборудования. Предполагается, что спрос известный и фиксированный. Данные об объеме закупок и стоимости каждого вида оборудования представлены в таблице 1.

При общих поставках накладные расходы составляют 11 000 руб.

Необходимо проанализировать оптимальную стратегию при общих поставках этих видов товара.

Определим скалярное произведение векторов $\bar{D} \cdot \bar{C}_h = 269,5$ (тыс. руб.).

Оптимальный интервал повторного заказа определяется по формуле (1.4). $T_0^* = 0,2857$ года (104 дня)

Для основных параметров стратегии управления запасами при оптимальной организации общих поставок получим:

1) объем товаров в заказе (для расчета используем формулу (1.6)) представлены в таблице 2.

2) издержки хранения находим как $X_i^* = \frac{C_{hi} \cdot q_i^*}{2}$. Результаты расчетов представлены в таблице 3.

3) издержки поставок (общих за год) определяем по формуле:

$$П = \frac{1}{T_{ог}^*} \cdot C_0;$$

$$П = 38,500 \text{ (тыс. руб.)}$$

4) среднюю стоимость запасов находим по формуле $C_i = \frac{C_{hi} \cdot q_i^*}{2}$

Результаты расчетов представлены в таблице 4.

Следовательно, при оптимальном управлении запасами в случае организации общих поставок этих продуктов имеем:

1) издержки поставок составляют 38,500 тыс. руб.

2) общие издержки хранения по всем товарам – 38,500 тыс. руб.

3) средняя стоимость запасов по всем товарам составляет 385 тыс. руб.

3. Учет временной стоимости денег в моделях управления запасами

При учете временной стоимости денег решение задачи оптимизации

стратегии управления запасами будет зависеть (в отличие от классического случая) от конкретной, принятой в рамках модели схемы выплат издержек хранения, что представляется спецификой контрактных условий выплат таких издержек. Эти выплаты могут быть привязаны к разным вариантам таких схем. Задача оптимизации работы многономенклатурной системы управления запасами будет описана для следующих модификаций моделей:

– выплаты издержек хранения по схеме «пренумерандо», что для рассматриваемой модели системы управления запасами соответствует реализации таких выплат в момент общей поставки партии заказа, т.е. до истечения периода хранения партии товара;

– выплаты издержек хранения по схеме «постнумерандо», что для рассматриваемой модели системы управления запасами соответствует реализации таких выплат в момент общей поставки уже следующей партии заказа;

– выплаты таких издержек в середине периода времени, в течение которого хранится партия товара.

Таблица 1. Показатели, характеризующие закупаемое оборудование

№ п/п	Наименование оборудования	Объем закупок D_i , ед. оборудования	Издержки хранения C_{hi} , руб./ед.	Стоимость одной ед. оборудования C_{pi} , руб.	Издержки дефицита C_{vi} , руб.	Прибыль от ед. оборудования P_{pi} , руб.
1	Трансформатор напряжения 220кВ	20	315	3150	630	378
2	Трансформатор напряжения 110кВ	40	200	2000	400	240
3	Опорный изолятор 6-10 кВ	310	40	400	80	48
4	Опорный изолятор 35кВ	300	90	900	180	108
5	Опорный изолятор 110 кВ	830	260	2600	520	312

Таблица 2. Объем товаров в заказе

Размер заказа	Товар				
	1	2	3	4	5
q_i , ед. товара	6	11	89	86	237

Таблица 3. Издержки хранения

Сумма издержек хранения	Товар				
	1	2	3	4	5
X_i^* , тыс. руб.	0,900	1,142	1,771	3,857	30,828

Таблица 4. Средняя стоимость запасов

Средняя стоимость запасов	Товар				
	1	2	3	4	5
C_i , тыс. руб.	9,000	11,429	17,714	38,571	308,286

Для всех таких модификаций моделей систем управления запасами в качестве критерия оптимизации стратегии управления принимается максимизация суммарной интенсивности доходов для имеющих место в системе управления запасами уходящих и приходящих денежных потоков, характеризующих анализируемую систему.

Рассмотрим организацию управления запасами теплосетевой компании при выплате издержек хранения в начале периода – «пренумерандо».

Для удобства дальнейшего сравнения результатов с аналогичными, но уже для классической модели без учета временной стоимости денег, полагаем что $C_0P_{\text{ин}}$ (например, издержки уже включены в стоимость товара). Для определенности считаем, что $P_{\text{ин}}/C_{\text{ин}} = 0,12$ (для всех видов продукции), и принимаем, что годовая ставка наращивания составляет 20% т.е. $r = 0,2$.

Найдем параметры оптимальной стратегии управления запасами с общими поставками для модели с учетом временной структуры процентных ставок и сравним их с аналогичными параметрами для классической модели.

Определим скалярные произведения векторов.

$$\bar{D} \cdot \bar{C}_h = 269,500 \text{ (тыс. руб.)}$$

$\bar{C}_{\text{опп}} = \bar{C}_{\text{п}}$, так как $\bar{C}_{\text{оп}} = 0$, поэтому

$$\bar{D} \cdot \bar{C}_{\text{опп}} = \bar{D} \cdot \bar{C}_{\text{п}} = 2695 \text{ (тыс. руб.)}$$

Для нахождения оптимальной стратегии с учетом временной стоимости денег предварительно определяем значение

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \\ &= 3r \cdot \sqrt{\frac{3C_0 \cdot (\bar{D} \cdot \bar{C}_h)^2}{2(\bar{D} \cdot \bar{C}_h + r \cdot (\bar{D} \cdot \bar{C}_{\text{опп}}))^3}} \\ &= 0,02857. \end{aligned}$$

Затем, переходим к $\arccos \alpha$ (как видим, для данной ситуации он равен 1,5422 радиан), рассчитываем значение

$$\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) = 0,8707.$$

После этого находим значение

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{r}{3} \cdot \frac{\bar{D} \cdot \bar{C}_{\text{опп}}}{\bar{D} \cdot \bar{C}_h}} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \\ &= 1,7415. \end{aligned}$$

В соответствии с принятыми числовыми значениями показателей, характеризующих рассматриваемую систему управления запасами, имеющееся кубическое уравнение относительно неизвестного Z имеет в этой ситуации вид $Z^3 - 3 \cdot Z - 0,0571 = 0$.

Таблица 5. Объем товаров в заказе

Размер заказа	Товар				
	1	2	3	4	5
q_i^0 ед. товара	3	7	51	49	136

Таблица 6. Годовые издержки хранения

Сумма издержек хранения	Товар				
	1	2	3	4	5
X_i^0 тыс. руб.	0,517	0,656	1,017	2,214	17,702

При найденном в данном примере значении $Z_0 = 1,7502$ левая часть этого равенства принимает значение $1,7415^3 - 3 \cdot 1,7415 - 0,0571 \approx -0,0001$.

При выбранной точности расчетов для Z_0 получаем достаточно хорошее приближение. Определив значение $Z_0 = 1,7415$, переходим к анализу основных параметров оптимальной стратегии управления запасами. Оптимальное значение T_{06}^* периода времени между общими поставками с учетом временной стоимости денег (рассчитывается по формуле (1.25)) для рассматриваемого случая составляет:

$$T_{06}^* = T_{06}^*/Z = 0,164 \text{ года (60 дней)}$$

В оптимальном случае с учетом временной стоимости денег при общих поставках товаров имеем:

1) объем товаров в заказе рассчитываются по формуле $q_i^0 = T_{06}^* \cdot D_i$.

Результаты расчетов представлены в таблице 5.

2) годовые издержки хранения находим как $X_i^0 = \frac{C_{hi} \cdot q_i^0}{2}$ по видам товаров. Результаты расчетов представлены в таблице 6.

Суммарные годовые издержки составят 22,107 тыс. руб.

3) накладные расходы на поставки в год составят 67,047 тыс. руб.

4) средняя стоимость запасов по всем товарам составит 221,074 тыс. руб.

Итак, если не учитывать временную структуру процентных ставок, то рекомендуемое согласно теории значение периода времени между общими поставками в данном примере равняется $T_0^* = 0,2857$ года (104 дня).

Учет временной стоимости издержек / доходов приводит к оптимальному значению этого показателя, которое в нашем примере составляет $T_{06}^* = 0,164$ года (60 дней).

Отклонение для периода времени между общими поставками партий соответствует ошибке порядка 43%. Понятно, что такая ошибка приведет к существенному изменению стратегии управления запасами и, кроме

того, может значительно отразиться на показателе эффективности работы системы. В частности, оценим отклонение показателя интенсивности доходов системы управления запасами в рамках рассматриваемого примера для интересующих нас двух случаев:

1) при $T_{06}^* = 0,164$ года (60 дней) (стратегия реализуется с учетом временной стоимости денег);

2) при $T_0^* = 0,2857$ года (104 дня) (стратегия реализуется без учета временной стоимости издержек/доходов).

Случай 1.

При стратегии с использованием показателей T_{06}^* и q_i^* интенсивность доходов $F_{\text{max}} = 188,567$ (тыс. руб.).

Случай 2.

При стратегии с использованием показателей T_{06}^0 и q_i^0 интенсивность доходов $F^0 = 167,379$ (тыс. руб.).

Разница $F_{\text{max}} - F^0$ в интенсивности доходов (годовой) для этих случаев по анализируемым видам товара имеет порядок 21,367 тысяч рублей за год, несмотря на некоторое увеличение общих издержек. Кроме того, при уменьшении интервала времени между общими поставками товаров уменьшаются и объемы хранимых товаров, и объемы страховых запасов по этим товарам, следовательно, и замороженные в них деньги. Поэтому суммарный показатель возможного повышения эффективности системы за счет учета временной структуры процентных ставок по всей группе товаров может оказаться весьма существенным.

Рассмотрим стратегию оптимизации управления запасами при выплате издержек хранения «постнумерандо» в условиях предыдущей задачи.

Найдем оптимальную длительность периода времени между общими поставками $T_{06}^0(\text{норм})$ и оптимальные размеры $q_i^*(\text{норм})$ i -товаров в партии заказа. Найдем значение $\cos \alpha = -0,0238$.

Далее имеем $\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) = 0,8621$ и $Z_0(\text{норм}) = 1,7241$.

Таблица 7. Объем товаров в заказе

Размер заказа	Товар				
	1	2	3	4	5
q_i^* ед. товара	3	7	51	50	138

Таблица 8. Объемы товаров в заказе

Размер заказа	Товар				
	1	2	3	4	5
q_i^* ед. товара	3	7	51	49	137

Учитывая то, что в данном примере $T_0^* = 0,553647$ года, для основных параметров оптимальной стратегии управления в этом случае имеем

$$T_{00}^*(\text{пост}) = 0,168 \text{ года (60 дней)}.$$

Определяем объем товаров в заказе. Результаты расчетов представлены в таблице 7.

Оценим также отклонение показателей интенсивности доходов в этом примере при выплате издержек хранения «постнумерандо» для интересующих нас двух случаев:

1) при $T_{00}^*(\text{пост}) = 0,168$ года (60 дней) (стратегия реализуется с учетом временной стоимости денег);

2) при $T_0^* = 0,2857$ года (104 дня) (стратегия реализуется без учета временной стоимости издержек/доходов).

Случай 1.

При стратегии, при которой используются показатели $T_{00}^*(\text{пост})$ и $q_i^*(\text{пост})$ интенсивность доходов $F_{\text{пост}}^* = 188,622$ (тыс. руб.)

Случай 2.

При стратегии с использованием показателей T_{00}^0 и q_i^0 интенсивность доходов $F^0 = 167,383$ (тыс. руб.).

Разница $F_{\text{пост}}^* - F^0$ в интенсивности доходов (годовой) для этих случаев по анализируемым видам товара при выплате издержек «постнумерандо» имеет порядок 21,239 тысяч рублей за год, несмотря на некоторое увеличение общих издержек. Заметим, что имеющиеся расхождения будут, очевидно, соответствующим образом нивелированы на практике из-за необходимости округления результатов для размеров i -заказов в общих партиях поставок до приемлемого целого значения.

Найдем оптимальную стратегию при выплате издержек хранения в середине интервала повторного заказа для задачи о пополнении запасов «Теплосетевой компании». Оптимальная длительность периода времени между общими поставками $T_{00}^*(\text{mod}) = 0,165$ года (60 дней).

Результаты расчетов представлены в таблице 8.

Для сравнения результатов с аналогичными для классической модели, но без учета временной стоимости денег в примере ранее было условно принято $C_{00} = 0$.

Рассчитаем интенсивность доходов (обозначим ее через $F_{\text{max}}(\text{mod})$), соответствующей оптимальной стратегии в рамках модифицированной модели $F_{\text{max}}(\text{mod}) = 188,542$ (тыс. руб.).

При стратегии с использованием показателей T_{00}^0 и q_i^0 интенсивность доходов $F_{\text{пост}}^0 = 167,384$ (тыс. руб.).

Разница $F_{\text{max}} - F_{\text{пост}}^0$ в интенсивности доходов (годовой) для этих случаев по анализируемым видам товара при выплате издержек в середине интервала повторного заказа имеет порядок 21,156 тысяч рублей за год, несмотря на некоторое увеличение общих издержек. Заметим, что имеющиеся расхождения будут, очевидно, соответствующим образом нивелированы на практике из-за необходимости округления результатов для размеров i -заказов в общих партиях поставок до приемлемого целого значения.

4. Заключение

Таким образом, модели оптимальных стратегий управления запасами могут быть улучшены в смысле максимизации эффективности таких систем за счет учета действующих на рынке процентных ставок и временной стоимости денег при анализе денежных потоков, характеризующих соответствующие издержки и доходы. Учет особенностей конкретных схем выплат издержек мало влияет на параметры оптимальной стратегии управления запасами при заданном годовом потреблении, заданной структуре процентных ставок и заданных тарифах издержек. При этом суммарный показатель возможного повышения эффективности системы за счет учета временной стоимости издержек/доходов по всей имеющейся номенклатуре товаров оказывается весьма значительным.

Литература

1. Беляев Ю. А. Дефицит, рынок и управление запасами. – М.: УДН, 1991. – 230 с.
2. Бродецкий Г. Л. Управление запасами. – М.: Эксмо, 2007. – 282с.
3. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. Учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.
4. Степанов А. Г. Разработка управленческого решения средствами пакета Excel. Учебное пособие. – СПб: Питер, 2009. – 172 с.
5. Шрайбфедер Д. Эффективное управление запасами. – Альпина Бизнес Букс, 2006. – 306 с.
6. Черныяева Н.А., Шишов В.Ф. Однономенклатурные модели управления запасами с учетом временной стоимости денег. Межвузовский сборник научных трудов «Математико-статистический анализ социально-экономических процессов». Выпуск 9. М.: МЭСИ, 2012, с.238-240.
7. Шишов В.Ф. Анализ многономенклатурных моделей управления запасами для различных условий поставок. Межвузовский сборник научных трудов «Математико-статистический анализ социально-экономических процессов». Выпуск 9. М.: МЭСИ, 2012, с.248-252.

References

1. Belyaev A. Deficiency of the market and inventory management. – Moscow: UDN, 1991. – 230 p.
2. Brodetsky GL. Inventory Management. – New York: Penguin Books, 2007. – 282s.
3. Ryizikov YI. Queuing theory and inventory management. Textbook for Higher Schools. – St.: Peter, 2001. – 384 p.
4. Stepanov AG Development of management decision with the tools of Excel. Textbook. – St. Petersburg: St. Petersburg, 2009. – 172 p.
5. Shraybfeder D. Effective inventory management. – Harvard Business Review, 2006. – 306 p.
6. Chernyaeva NA, Shishov VF. Onomenclature inventory control models with the time value of money. Interuniversity collection of scientific papers «Mathematical and statistical analysis of the socio-economic processes.» Issue 9. M. MESI, 2012, s.238-240.
7. Shishov VF. Analysis of multi-nomenclature inventory control models for different supply conditions. Interuniversity collection of scientific papers «Mathematical and statistical analysis of the socio-economic processes.» Issue 9. M. MESI, 2012, s.248-252.