# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОТРЕБЛЕНИЕМ

**ОТОЗВАНО/ RETRACTED**

УДК 517.977

**Алла Юрьевна Меерсон,**
к. ф.-м. н., доцент кафедры математических методов экономики Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова (РЭУ им. Г.В. Плеханова)
Тел.: (495) 465 68 46
Эл. почта: allameerson@yandex.ru

**Александр Петрович Черняев,**
д. ф.-м. н., профессор кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета) (МФТИ)
Тел.: (495) 465 68 46
E-mail: chernyaev49@yandex.ru

В работе изучаются общие закономерности моделей, основанных на вариационных методах различных задач оптимального управления потреблением: принятия решений при управлении домашним хозяйством, а также моделей экономической динамики Харрода–Домара и Солоу. Роль оптимального управления в этих задачах играет функция потребления: в первой задаче – это функция потребления домашнего хозяйства, в модели Харрода–Домара – это совокупное потребление, а в модели Солоу – это среднедушевое потребление. Роль уравнения связи в первой задаче играет уравнение динамического баланса между доходами, расходами и накопленными сбережениями, в модели Харрода–Домара – уравнение динамического баланса между доходом и инвестициями, с предположением пропорциональности инвестиций и производной от дохода[illegible]дели [illegible]ль [illegible] св[illegible]ет у[illegible] динами[illegible]кого ба[illegible]нса ме[illegible]ду фо[illegible]вооруж[illegible]ностью, [illegible]род[illegible]хозяй[illegible]твенной [illegible]роизвод[illegible]ельно[illegible]ью тру[illegible] и средн[illegible]душевы[illegible]отре[illegible]. Во всех [illegible]ссматр[illegible]емых [illegible]оцесс[illegible] задача [illegible]тимальн[illegible] уп[illegible]влени[illegible] ставится [illegible]к зада[illegible] макси[illegible]изации [illegible]ункци[illegible]ла [illegible]ыраж[illegible]ще[illegible] инте[illegible]ральную ди[illegible]рованну[illegible] полезност[illegible]оления [illegible]раве[illegible] уравнения связи.

***Ключевые слова:*** *вариационная задача; уравнение связи; оптимальное управление; потребление; модели экономической динамики; функция полезности; интегральная дисконтированная полезность потребления*

**Alla Yu[illegible]n,**
Phys.-[illegible]D., ass[illegible]ciat[illegible] Professor, Dep[illegible]ment [illegible] mathem[illegible]tical m[illegible]th[illegible]ds of econo[illegible] Plek[illegible]nov [illegible]niversi[illegible] of Econ[illegible] ([illegible]UE)
Tel: (49[illegible] 465 [illegible]8-46
E-mail: [illegible]lameer[illegible]on@[illegible]ndex.ru

**Alexander P. Chernyaev,**
professor of the Department of higher mathematics Moscow Institute of physics and technology (state University) (MIPT)
Tel.: (495) 465 68 46
E-mail: chernyaev49@yandex.ru

**SOME PROPERTIES OF THE VARIATIONAL PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL OF CONSUMPTION**

In this paper we study the General patterns of models based on variational methods in various problems of optimal control of consumption: decision-making in the management of the household, as well as models of the economic dynamics of the Harrod–Domar and Solow. The role of optimal control in these tasks is played by the consumption function: in the first task is a function of consumption of the household, the model of Harrod–Domar is the aggregate consumption, as in the Solow model is per capita consumption. The role of the equation of when the first task is the equation of the dynamic balance between income, expenses, and accumulated savings, the model of Harrod–Domar – equation dynamic balance between income and investment, with the assumption of proportionality of investment and derivative income, as in the Solow model the role of the equation of the relationship is played by the equation of dynamic balance between the capitallabor ratio, economic productivity and per capita consumption. In all considered processes, the optimal control problem is formulated as a maximization problem of the functional expressing the integrated discounted utility of consumption under the equity equation.

***Keywords:*** *variational problem; coupling equation; optimal control; consumption; models of economic dynamics; utility function; integrated discounted utility of consumption.*

**1. Введение.**

Итак, задачу оптимального управления в общем виде ставим, как задачу максимизации интегральной дисконтированной полезности потребления [1].

$$\int_{t_0}^{t_1} u(c(t))\exp(-\delta t)dt \Rightarrow \max. \qquad (1.1)$$

Здесь $t$ – время, $t_0$ и $t_1$ – начальный и конечный его моменты, а $\delta$ – коэффициент дисконтирования. Следуя [1] считаем, что полезность потребления оценивается функцией $u(c)$, которая описывает постоянное отвращение к риску по Эрроу–Пратту:

$$\alpha = -\frac{u''(c)c}{u'(\mathrm{c})} \geq 0. \qquad (1.2)$$

Чтобы обосновать (1.2) и обсудить ее экономический смысл, введем обозначение

$g(c)$ [illegible] $u'($[illegible] (1.3)

Тог[illegible] $g(c$[illegible] п[illegible]дельно[illegible] по[illegible]зностью [illegible]ия. [illegible]алее, [illegible]уч[illegible]м (1.[illegible]

$$g'(c) = u''(c),$$

$$E_c(g) = \frac{g'(c)}{g(c)/c} = \frac{u''(c)c}{u'(c)} = -\alpha.$$

Ра[illegible]матр[illegible]ая (1[illegible], как ди[illegible]ере[illegible]иальное уравнение с[illegible]онижа[illegible]щей пор[illegible]док ур[illegible]внения заменой (1.3) [illegible]олуч[illegible]

$$u(c) = \begin{cases} \dfrac{\gamma c^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \chi, \ \alpha \neq 1; \\ \gamma \ln c + \chi, \ \alpha = 1; \end{cases}$$

$$\gamma = \mathrm{const} > 0, \ \chi = \mathrm{const} \qquad (1.4)$$

**2. Задача управления домашним хозяйством.**

В задаче управления домашним хозяйством считаем, что накопленные сбережения $x = x(t)$, процент по наличным деньгам $\rho = \rho(t)$, зарплаты с пенсиями $P = P(t)$ и потребление удовлетворяют уравнению динамического баланса, играющему роль уравнения связи

$$\dot{x} = \rho x + P - c. \qquad (2.1)$$

Накопленные сбережения считаем закрепленными на концах временного промежутка:

$$x(t_0) = x_0 \geq 0, \qquad (2.2)$$

$$x(t_1) = x_1 \geq 0. \qquad (2.3)$$

На $c$, играющую роль управления, вполне естественно наложить ограничение

$$0 < \underline{c} \leq c \leq \overline{c} < +\infty, \qquad (2.4)$$

где $\underline{c}$ – прожиточный минимум, а $\overline{c}$ – прожиточный максимум. Естественно рассмотреть ситуацию, когда выполнено фазовое ограничение

$$x \geq 0. \qquad (2.5)$$

Принято: (1.1), (2.1) – (2.3) называть вариационной задачей.

Подставив в левую часть (1.1) потребление c из уравнения (2.1), найдем, что

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} u(\rho(t)x + P(t) - \dot{x})\exp(-\delta t)dt \qquad (2.6)$$

Таким образом, мы имеем задачу максимизации вариационного функционала (2.6) с закрепленными концами (2.2), (2.3).

Уравнение Эйлера для этой задачи будет иметь вид:

$$\rho(t)u'(c(t))e^{-\delta t} + \frac{d}{dt}[u'(c(t))e^{-\delta t}] = 0. \qquad (2.7)$$

Систему из (2.7) и (2.1) удается проинтегрировать [4] и то[illegible]

$$\text{[illegible]}t) = (\text{[illegible]})^{-1}\left(A\,\mathrm{e}\text{[illegible]}\left(\delta t - \int_{t_0}\text{[illegible]}(\tau)d\text{[illegible]}\right)\right), \qquad \text{[illegible]}.8)$$

$$x(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\left[\text{[illegible]}\right]\left[\mathrm{ex}\text{[illegible]}\int^{t}\text{[illegible]}\right]\text{[illegible]}_0\text{[illegible]}\mathrm{p}\text{[illegible]}\int^{t}\text{[illegible]} \qquad (2.9)$$

По[illegible]тоян[illegible] $A$ [illegible]аходится из [illegible]2.3). [illegible]ля п[illegible]вер[illegible]и реализации экстремалью (2.8), (2.9) экстремума функционала (1.1), или, что то же самое (2.6) достаточно рассмотреть разность

$$I(x + h) - I(x),$$

где $h = h(t)$ – малое возмущение, обращающееся в нуль на концах $t_0$ и $t_1$ и воспользоваться тем, что $u''(c(t)) \leq 0$. Справедливость последнего неравенства следует из свойств функции полезности, описывающей постоянное отвращение к риску по Эрроу–Пратту (1.2) [1].

Из (2.2), (2.3) и (2.8), (2.9) следует, что процент по наличным деньгам $\rho = \rho(t)$ и зарплаты с пенсиями $P = P(t)$ должны быть известными на всем отрезке $[t, t_1]$. Экономически это означает, что домашнее хозяйство в момент времени $t < t_1$ не может решить задачу оптимизации потребления не имея прогноза для $\rho(t)$ и $P(t)$ на $(t_0, t_1]$. Если же функции неожиданно меняются в некоторый момент времени $t$, то решение искомой задачи вообще говоря меняется даже на $(t_0, t]$. Это исследование показывает меру преимущества домашних хозяйств заранее знающих о грядущих изменениях $\rho(t)$ и $P(t)$ перед всеми остальными хозяйствами.

**3. Задача управления в модели Харрода-Домара**

В макроэкономической модели Харрода–Домара [2, 3, 5, 6] с переменным коэффициентом капиталоемкости прироста дохода, зависящем от времени мы решаем аналогичную задачу оптимального управления максимизируя интегральную дисконтированную полезность потребления (1.1) только под $c = c(t)$ мы понимаем совокупное потребление.

Уравнение модели Харрода-Домара с экзогенной динамикой потребления произвольного характера имеет вид

$$Y(t) = c(t) + BY'(t). \qquad (3.1)$$

Здесь $t$ – по прежнему, время, $Y(t)$ – доход, который рассматривается, как сумма потребления $c(t)$ и инвестиций $I(t)$. Основная предпосылка: $I(t) = BY'(t)$, где $B$ – коэффициент капиталоемкости прироста дохода. До сих пор считалось, что

$$B = const > 0. \qquad (3.2)$$

Для случая (3.2) решение дифференциального уравнения (3.1) известно и дается формулой

$$Y(t) = Y_0 e^{\frac{t-t_0}{B}} - \frac{1}{B}\int^{t} c(\tau)e^{\frac{t-\tau}{B}}d\tau \qquad (3.3)$$

Здес[illegible] пре[illegible]пола[illegible] [illegible]ы[illegible]лненн[illegible] н[illegible]чальные ус[illegible]ви[illegible]

$$Y(t_0) = Y_0 > 0,\ Y(t_1) = Y_1 \geq 0. \qquad (3.4)$$

В настоящей работе предполагается, что $B$ является функцией времени, т. е.

$$B = B(t). \qquad (3.5)$$

П[illegible] условиях (3[illegible]) и (3[illegible] решение [illegible]равн[illegible]ия (3.1) буде[illegible] даваться форм[illegible]лой

$$Y(t) = Y(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{B(s)}} - e^{\int_{t_0}^{t}\frac{d\text{[illegible]}}{B(s)}}\int_{t_0}^{t}\frac{c(\tau)}{B(\tau)}e^{-\int_{t_0}\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{B(s)}}d\tau, \qquad (3.6)$$

Очевидно, (3.6) является обобщением (3.3).

Выражая потребление из уравнения (3.1) подставляем его в (1.1):

$$J(Y) = \int_{t_0}^{t_1} u(Y - B(t)Y')\exp(-\delta t)dt. \qquad (3.7)$$

Нам достаточно рассмотреть разность $J(Y+h) - J(Y)$, где $h = h(t)$ – малое возмущение и показать не положительность этой разности.

На основании (3.7) можно записать

$$J(Y+h) - J(Y) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}[u(Y + h - B(t)(Y' + h')) - u(Y - B(t)Y')]\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}[u(c(t) + h - B(t)h') - u(c(t))]e^{-\delta t}dt. \qquad (3.8)$$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, имеем

$$u(c(t)+h-B(t)h') = u(c(t)) + u'(c(t))[h-B(t)h'] +$$
$$+\frac{1}{2}u''(c(t))[h-B(t)h']^2 + R(t), \qquad (3.9)$$

где

$$R(t) = o[h-B(t)h']^2, \text{ при } h-B(t)h' \to 0. \qquad (3.10)$$

Подставляя (3.9) и (3.10) в (3.8), получим

$$J(Y+h)-J(Y) = \int_{t_0}^{t_1} u'(c(t))[h-B(t)h']\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u''(c(t))[h-B(t)h']^2 e^{-\delta t}dt + \int_{t_0}^{t_1} R(t)e^{-\delta t}dt. \qquad (3.11)$$

Пользуясь интегрированием по частям, мы можем записать

$$-\int_{t_0}^{t_1} u'(c(t))B(t)h'e^{-\delta t}dt = -\int_{t_0}^{t_1} u'(c(t))B(t)\,e^{-\delta t}dh =$$
$$= -u'(c(t))B(t)e^{-\delta t}h\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} h\frac{d}{dt}\left[u'(c(t))B(t)e^{-\delta t}\right]dt.$$

Первое слагаемое правой части последнего равенства обращается в нуль, поскольку

$$h(t_0) = h(t_1) = 0. \qquad (3.12)$$

С учетом (3.12) предпоследнее равенство упростится и будет иметь вид

$$-\int_{t_0}^{t_1} u'(c(t))B(t)h'\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} h\frac{d}{dt}[u'(c(t))B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}]dt.$$

Подставляя последнее в (3.11) будем иметь

$$J(Y+h)-J(Y) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} h\{u'(c(t))\,\mathrm{e}^{-\delta t} + \frac{d}{dt}[u'(c(t)B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}]\}dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u''(c(t))[h-B(t)h']^2\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt + \int_{t_0}^{t_1} R(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt. \qquad (3.13)$$

Используя основную лемму вариационного исчисления, будем иметь уравнение Эйлера:

$$u'(c(t))e^{-\delta t} + \frac{d}{dt}[u'(c(t))B(t)e^{-\delta t}] = 0. \qquad (3.14)$$

Для проверки реализации экстремалью определяемой уравнением (3.14) и условиями (3.4) экстремума функционала (1.1), или, что то же самое (3.7) достаточно рассмотреть разность

$$J(Y+h) - J(Y),$$

где $h = h(t)$ – малое возмущение, обращающееся в нуль на концах $t_0$ и $t_1$ и воспользоваться тем, что $u''(c(t)) \le 0$. Справедливость последнего неравенства следует из свойств функции полезности, описывающей постоянное отвращение к риску по Эрроу–Пратту (1.2) [1].

**4. Задача управления в модели Солоу**

В макроэкономической модели Солоу [4] мы также решаем аналогичную задачу оптимального управления максимизируя интегральную дисконтированную полезность потребления (1.1) только под $c = c(t)$ мы понимаем среднедушевое потребление.

Модель макроэкономической динамики Солоу весьма популярна и уже стала классической в математической экономике [4]. Уравнение модели макроэкономической динамики Солоу с переменными коэффициентами имеет вид

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho(1-a)f(k), k(t_0) = k_0 > 0, k(t_0) = k_0 > 0 \quad (4.1)$$

Здесь $t$ – по прежнему, время, которое считается непрерывным и измеряется в годах, а $t_0$ – его начальный момент; $k = k(t)$ – фондовооруженность; $\lambda = \mu + \nu$, где $\mu \in (0, 1)$ – доля выбывших за год основных производственных фондов, а $\nu \in (-1, 1)$ – годовой темп прироста числа занятых; $a \in (0, 1)$ – коэффициент прямых затрат (доля промежуточного продукта в валовом общественном продукте); $\rho \in (0, 1)$ – норма накопления (доля валовых инвестиций в валовом внутреннем продукте; $x = f(k)$ – народнохозяйственная производительность труда. Поскольку для среднедушевого потребления имеется выражение

$$c = c(t) = (1-\rho)(1-a)x = (1-\rho)(1-a)f(k), \qquad (4.2)$$

то из (4.2) получаем

$$(1-a)f(k) = \frac{c}{1-\rho}, \ \rho \neq 1. \qquad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в (4.1), будем иметь

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \frac{c\rho}{1-\rho}. \qquad (4.4)$$

Выражая из (4) среднедушевое потребление, получим

$$c = c(t) = \frac{1-\rho}{\rho}\left[\frac{dk}{dt} + \lambda k\right], \ \rho \neq 0. \qquad (4.5)$$

Задача оптимального управления ставится, как максимизация интегральной дисконтированной полезности среднедушевого потребления:

$$\int_{t_0}^{t_1} u(c(t))\exp(-\delta t)dt, \qquad (4.6)$$

где $u$ – функция полезности, а $\delta$ – коэффициент дисконтирования будущей полезности [1].

Мы опять применяем вариационный метод решения задачи. Обозначив (4.6) за $J(k)$, получаем функционал, как объект максимизации

$$J(k)=\int_{t_0}^{t_1} u\big(c(t)\big)\exp(-\delta t)\,dt. \qquad (4.7)$$

Пользуясь, теперь, выражением (4.5) из (4.7) получим:

$$J(k)=\int_{t_0}^{t_1} u\left(\frac{1-\rho}{\rho}\left[\frac{dk}{dt}+\lambda k\right]\right)\exp(-\delta t)\,dt. \qquad (4.8)$$

Нам опять достаточно рассмотреть разность $J(k+h)-J(k)$, где $h=h(t)$ – малое возмущение и показать неположительность этой разности.

На основании (4.8), пользуясь линейностью интеграла, можно записать

$$J(k+h)-J(k)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{e}^{-\delta t}\left\{u\left(c(t)+\frac{1-\rho}{\rho}\left[h'+\lambda h\right]\right)-u(c(t))\right\}dt. \qquad (4.9)$$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, имеем

$$u\left(c(t)+\frac{1-\rho}{\rho}\left[h'+\lambda h\right]\right)=$$

$$=u(c(t))+u'(c(t))\left[\frac{1-\rho}{\rho}\left(h'+\lambda h\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}u''(c(t))\left[\frac{1-\rho}{\rho}\left(h'+\lambda h\right)\right]^2+R(t), \qquad (4.10)$$

где

$$R(t)=o\left(\left[\frac{1-\rho}{\rho}\left(h'+\lambda h\right)\right]^2\right) \text{ при } \frac{1-\rho}{\rho}\left(h'+\lambda h\right)\to 0. \qquad (4.11)$$

Подставляя (4.10) и (4.11) в (4.9), получим

$$J(k+h)-J(k)=\int_{t_0}^{t_1} u'(c(t))\left[\frac{1-\rho}{\rho}\left(h'+\lambda h\right)\right]\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u''(c(t))\left[\frac{1-\rho}{\rho}\left(h'+\lambda h\right)\right]^2 e^{\delta t}dt+\int_{t_0}^{t_1} R(t)e^{-\delta t}dt. \qquad (4.12)$$

Пользуясь интегрированием по частям, мы можем записать

$$\int_{t_0}^{t_1} u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}h'\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt=\int_{t_0}^{t_1} u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\mathrm{e}^{-\delta t}\,dh=$$

$$u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}h\Bigg|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} h\frac{d}{dt}\left[u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}\right]dt. \qquad (4.12')$$

Первое слагаемое правой части последнего равенства обращается в нуль, если мы ставим задачу с закрепленными концами

$$h(t_0)=h(t_1)=0 \qquad (4.13)$$

С учетом (4.13) предпоследнее равенство упрощается и будет иметь вид

$$\int_{t_0}^{t_1} u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}h'\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt=$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1} h\frac{d}{dt}[u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\mathrm{e}^{-\delta t}]dt. \qquad (4.12'')$$

Подставляя (4.12´´) в (4.12) будем иметь

$$J(k+h)-J(k)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} h\{u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\lambda\,\mathrm{e}^{-\delta t}-\frac{d}{dt}[u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\mathrm{e}^{-\delta t}]\}dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u''(c(t))\left[\frac{1-\rho}{\rho}\left(h'+\lambda h\right)\right]^2 e^{-\delta t}dt+\int_{t_0}^{t_1} R(t)e^{-\delta t}dt. \qquad (4.14)$$

Используя основную лемму вариационного исчисления, будем иметь уравнение Эйлера:

$$u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\lambda e^{-\delta t}-\frac{d}{dt}\left[u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}\right]=0. \qquad (4.15)$$

Для проверки реализации экстремалью определяемой уравнением (4.15) и предыдущими условиями экстремума функционала (1.1), или, что то же самое (4.7) достаточно рассмотреть разность

$$J(k+h)-J(k),$$

где $h=h(t)$ – малое возмущение, обращающееся в нуль на концах $t_0$ и $t_1$, и воспользоваться тем, что $u''(c(t))\le 0$. Справедливость последнего неравенства следует из свойств функции полезности, описывающей постоянное отвращение к риску по Эрроу–Пратту (1.2) [1].

**5. Заключение**

Мы рассмотрели различные модели экономической динамики [1–6], общей особенностью которых является оптимизационная постановка. В них нужно максимизировать интегральную дисконтированную полезность потребления. Все эти три модели это задачи оптимального управления и в роли управления выступает потребление. В первом случае это потребление домашнего хозяйства, во втором – совокупное потребление, а в третьем среднедушевое потребление. В работе разбирается вариационный подход ко всем трем задачам и демонстрируются преимущества этого подхода.

**Литература**

1. Дикусар В.В., Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Модели потребления и вопросы оптимального управления // Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. – М.: ВЦ РАН 2005. С. 46–61.

2. Harrow R.F. An Essay in Dynamic Theory // Economic Journal. – 1939. – Март (№ 49) – С. 14–33.

3. Domar E. Capital Expansion. Rate of Growth and Employment // Econometrica. – 1946. – Апрель (т. 14, № 2) – С. 137–147.
4. Solow R.M. Contribution to the Theory of Economic Growth // The Quarterly Jornal of Economics. – 1956. – February, Vol. 70. № 1 – P. 65–94.
5. Easterly W. The ghost of financing gap: how the Harrod-Domar growth model still haunts development economics // Research working paper, Washington, DC: World Bank.– 1997.– № WPD 1807.– P. 13.
6. Hoover K.D. Was Harrod Right? // GREDEG WP № 2013 – 02. – 2008.

**References**

1. D[illegible]asa[illegible] V.V., M[illegible]yerson [illegible] Che[illegible]ya[illegible] A.I. Pattern[illegible] of con[illegible]mptio[illegible] and i[illegible]es of o[illegible]imal co[illegible]rol [illegible] Theoretical and applied problems of nonlinear analysis. – Moscow: CC RAS 2005. Pp. 46–61.
2. Harrod R.F. An Essay in Dynamic Theory // Economic Journal. – 1939. – Март (№ 49) – С.14–33.
3. Domar E. Capital Expansion. Rate of Growth and Employment // Econometrica. – 1946. – Апрель (т. 14, № 2) – С. 137–147.
4. Solow R.M. Contribution to the Theory of Economic Growth // The Quarterly Jornal of Economics. – 1956. – February, Vol. 70. № 1 – P. 65–94.
5. Easterly W. The ghost of financing gap: how the Harrod-Domar growth model still haunts development economics // Research working paper, Washington, DC: World Bank.– 1997.– № WPD 1807.– P. 13.
6. Hoover K.D. Was Harrod Right? // GREDEG WP № 2013 – 02. – 2008.

**ОТОЗВАНО/ RETRACTED**